

Chương 1

ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN TRONG HÌNH HỌC

1.1. Ứng dụng trong hình học phẳng

1.1.1. Phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong tại một điểm

a) Điểm chính quy

- Cho đường cong (L) xác định bởi phương trình $f(x, y) = 0$. Điểm $M(x_0, y_0)$ được gọi là **điểm chính quy** của đường cong (L) nếu tồn tại các đạo hàm riêng $f'_x(M), f'_y(M)$ không đồng thời bằng 0.

- Cho đường cong (L) xác định bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. Điểm $M(x(t_0), y(t_0))$ được gọi là **điểm chính quy** của đường cong (L) nếu tồn tại các đạo hàm $x'(t_0), y'(t_0)$ không đồng thời bằng 0.

- Một điểm không phải là điểm chính quy được gọi là **điểm kì dị**.

b) Các công thức.

(1) Phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong xác định bởi phương trình $f(x, y) = 0$ tại điểm chính quy:

+ Vecto pháp tuyến $\vec{n} = \{f'_x(M), f'_y(M)\}$ tại M .

+ Tiếp tuyến $(d): f'_x(M) \cdot (x - x_0) + f'_y(M) \cdot (y - y_0) = 0$;

+ Pháp tuyến $(d'): \frac{x - x_0}{f'_x(M)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M)}$.

Chú ý: Trường hợp đặc biệt, đường cong cho bởi phương trình $y = f(x)$ thì phương trình tiếp tuyến của đường cong tại điểm $M(x_0, y_0)$ chính quy là $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Đây là công thức mà học sinh đã biết trong chương trình phổ thông.

(2) Phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong (L) xác định bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ tại điểm $M(x(t_0), y(t_0))$ chính quy:

+ Vecto Tiếp tuyến $\vec{a} = x'(t_0), y'(t_0)$ tại M .

+ Tiếp tuyến $(d): \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}$.

+ Pháp tuyến $(d'): x'(t_0) \cdot (x - x(t_0)) + y'(t_0) \cdot (y - y(t_0)) = 0$,

Ví dụ 1. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến với đường cong:

a) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ tại $(-2, 5)$.

b) $y = e^{1-x^2}$ tại giao điểm của đường cong với đường thẳng $y = 1$.

c) $\begin{cases} x = \frac{1+t}{t^3} \\ y = \frac{3}{2t^3} + \frac{1}{2t} \end{cases}$ tại $A(2, 2)$.

d) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ tại $M(8, 1)$.

Ví dụ 2. (2018) Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong

$$\begin{cases} x = (t^2 - 1)e^{2t} \\ y = (t^2 + 1)e^{3t} \end{cases} \quad \text{tại điểm ứng với } t = 0.$$

1.1.2. Độ cong của đường cong

a) Định nghĩa

Định nghĩa 1. M, M' là hai điểm trên đường cong (L) . $MT, M'T'$ là 2 tiếp tuyến dương. Người ta gọi độ cong trung bình của cung $\widehat{MM'}$ là tỷ số của góc giữa 2 tiếp tuyến dương MT và $M'T'$ với độ dài của cung $\widehat{MM'}$. Ký hiệu $C_{tb}(\widehat{MM'})$. Vậy

$$C_{tb}(\widehat{MM'}) = \frac{\alpha}{\widehat{MM'}} \text{ trong đó } \alpha = |MT, M'T'|.$$

Định nghĩa 2. Ta gọi độ cong của đường cong (L) tại điểm M là giới hạn nếu có của độ cong trung bình $C_{tb}(\widehat{MM'})$ khi M' tiến dần tới M trên đường cong (L) . Ký hiệu $C(M)$. Vậy

$$C(M) = \lim_{M' \rightarrow M} C_{tb}(\widehat{MM'}).$$

Ví dụ 1.

+ Độ cong điểm trên đường thẳng bằng 0.

+ Độ cong điểm trên đường tròn bán kính R bằng

$$C(M) = \lim_{M' \rightarrow M} C_{tb}(\widehat{MM'}) = \lim_{M' \rightarrow M} \frac{\alpha}{R \alpha} = \frac{1}{R}.$$

b) Các công thức tính độ cong của đường cong tại một điểm.

- Nếu đường cong cho bởi phương trình $y = f(x)$ thì:

$$C(M) = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

- Nếu đường cong cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ thì:

$$C(M) = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

- Nếu đường cong cho bởi phương trình trong tọa độ cực $r = r(\varphi)$ thì:

$$C(M) = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ví dụ 2. Tính độ cong của:

a) $y = -x^3$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{2}$.

b) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(t - \cos t) \end{cases} (a > 0)$ tại điểm bất kì.

c) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$ tại điểm bất kì. (2024.3).

d) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ tại điểm bất kì ($a > 0$).

e) $r = ae^{b\phi}, (a, b > 0)$.

Ví dụ 3.

a) (20173) Tính độ cong tại điểm ứng với $t = 0$ của đường

$$\begin{cases} x = e^t + \sin t \\ y = e^t - \cos t \end{cases}$$

b) (20182) Tính độ cong của đường $y = 2x^2 + 1$ tại điểm $A(1,3)$.

Bài tập

1. (20172) Tính độ cong của đường $y = \ln(\sin x)$ tại điểm ứng với $x = \frac{\pi}{4}$.

2. (20182) Tính độ cong của đường $y = x^3 + 2x^2 + x$ tại điểm ứng với $x = 1$.

3. Tính độ cong của đường $r = a(1 + \cos \varphi)$ ($a > 0$) tại điểm ứng với $\varphi = \pi/2$.

4. (20172) Tính độ cong của đường $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$ tại điểm ứng với $t = \pi$.

5. Tính độ cong của đường $y = \sin x$ tại điểm $M(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Độ cong lớn nhất của đường $y = \sin x$ bằng bao nhiêu?

1.1.3. Hình bao của họ đường cong phụ thuộc tham số

a) Định nghĩa: Cho họ đường cong (L) phụ thuộc vào một hay nhiều tham số. Nếu mỗi đường cong trong họ (L) đều tiếp xúc với đường cong (E) tại một điểm nào đó trên E và ngược lại, tại mỗi điểm thuộc (E) đều tồn tại một đường cong của họ (L) tiếp xúc với (E) tại điểm đó thì (E) được gọi là **hình bao của họ đường cong (L)** .

b) Quy tắc tìm hình bao của họ đường cong phụ thuộc một tham số

Định lý. Cho họ đường cong $F(x, y, c) = 0$ phụ thuộc một tham số c . Nếu họ đường cong trên không có điểm kỳ dị thì hình bao của nó được xác định bằng cách khử c từ hệ phương trình

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ F'_c(x, y, c) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Chú ý. Nếu họ đường cong đã cho có điểm kỳ dị thì hệ phương trình (1) bao gồm hình bao (E) và quỹ tích các điểm kỳ dị thuộc họ các đường cong đã cho.

Ví dụ 1. Tìm hình bao của họ đường cong sau:

a) $y = \frac{x}{c} + c^2$;

b) $cx^2 + c^2y = 1$;

c) $y = c^2(x - c)^2$.

1.2. Ứng dụng trong hình học không gian**1.2.1 Hàm vectơ**

- **Định nghĩa:** Giả sử I là một khoảng trong $\mathbf{R}$. Ánh xạ $t \in I \rightarrow \vec{r}(t) \in \mathbf{R}^n$ được gọi là **hàm vectơ** của biến số t xác định trên $\mathbf{R}$.

Nếu $n = 3$ ta viết $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

Đặt $M(x(t), y(t), z(t))$. Quỹ tích M khi t biến thiên trong I được gọi là **tốc độ** của hàm vector $\vec{r}(t)$.

- **Giới hạn:** Người ta nói hàm vector có giới hạn là $\vec{a}$ khi $t \rightarrow t_0$ nếu $\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0$, ký hiệu $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$.

- **Liên tục:** hàm vector $\vec{r}(t)$ Xác định trên I được gọi là liên tục tại $t_0 \in I$ nếu $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$ (tương ứng tính liên tục của các thành phần tương ứng $x(t), y(t), z(t)$).

- **Đạo hàm:** Giới hạn, nếu có của tỷ số $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0+h) - \vec{r}(t_0)}{h}$ được gọi là đạo hàm của hàm vector $\vec{r}(t)$ tại t_0 , ký hiệu $\vec{r}'(t)$ hay $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ khi đó ta nói hàm vector $\vec{r}(t)$ khả vi tại t_0 .

Nhận xét: nếu $x(t), y(t), z(t)$ khả vi tại t_0 thì $\vec{r}(t)$ cũng khả vi tại t_0 và

$$\vec{r}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}.$$

1.2.2. Đường cong

Cho đường cong (L) xác định bởi $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ tại điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ là một **điểm**

chính quy trên (L) (tồn tại các đạo hàm $x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)$ không đồng thời bằng 0.)

+ Phương trình tiếp tuyến tại M

$$(d): \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

+ Phương trình pháp diện tại M

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0$$

+ Độ cong của đường cong (L) :

$$C = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}.$$

Ví dụ 1.

a) (20182CK) Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong

$$\begin{cases} x = t \cos 2t \\ y = t \sin 2t \\ z = 3t \end{cases} \text{ tại điểm ứng với } t = \pi/2.$$

b) (20232) Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong $x = e^t + 2t$, $y = \sin(t) + t, z = 2t + 1$, tại điểm ứng với $t = 0$.

c) 20243) Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong

$$x = 2t, y = t^2 + 1, z = t^3, \text{ tại điểm } M(2; 2; 1).$$

Ví dụ 2.

a) (20222) Tính độ cong của đường $x = te^t, y = e^t, z = t$, tại điểm $M(0; 1; 0)$.

b) (20182GK) Tính độ cong tại điểm $M(1; 0; -1)$ của đường là giao của mặt trụ $4x^2 + y^2 = 4$ và mặt phẳng $x - 3z = 4$.

Ví dụ 3. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong

a) (20182GK) $x = \sin t, y = \cos t, z = e^{2t}$ tại điểm ứng với $t = 0$.

b) (20172GK) $x = 4 \sin 2t, y = 4 \cos t, z = 2 \sin t + 1$ tại điểm $M(1; -2\sqrt{3}; 2)$.

Ví dụ 4.

a) (20182) Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong cho dưới dạng giao của hai mặt cong $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ và $4x + 3y + 5z = 0$ tại điểm $M(3; -4; 0)$.

b) (20182) Viết phương trình pháp diện của đường cong $x = \sin t, y = 3e^{-t}, z = 3e^t$ tại điểm $M(0; 3; 3)$.

1.2.3. Trường vô hướng, đạo hàm theo hướng

a) Trường vô hướng

Ta nói rằng miền $\Omega \subseteq R^3$ có **trường vô hướng** u nếu tại mỗi điểm $M \in \Omega$, đại lượng vô hướng $u(M)$ nhận một giá trị xác định. Như vậy cho trường vô hướng trong miền Ω là cho hàm vô hướng $u(M)$ xác định trong miền Ω đó.

Ví dụ 1: Sự phân bố nhiệt độ trong vật thể Ω tạo nên trường vô hướng trong vật thể Ω đó, vì mỗi điểm của vật thể đều có nhiệt độ tương ứng biểu thị bằng một số.

Trường vô hướng mà giá trị của hàm số u không phụ thuộc vào thời gian t gọi là **trường vô hướng dừng, ngược lại là không dừng**, ở đây ta chỉ xét trường vô hướng dừng.

Tập hợp tất cả các điểm $M(x, y, z) \in \Omega$ mà hàm $u = u(x, y, z) = C$, C là một hằng số không đổi, tạo nên một mặt cong trong không gian, mặt cong đó gọi là **mặt mức (hay mặt đẳng trị)**.

Rõ ràng các mặt mức khác nhau thì không giao nhau và toàn miền Ω được phủ bởi các mặt mức.

Ví dụ 2: Một điện tích q được đặt tại gốc tọa độ tạo nên trường điện thế

$$u = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

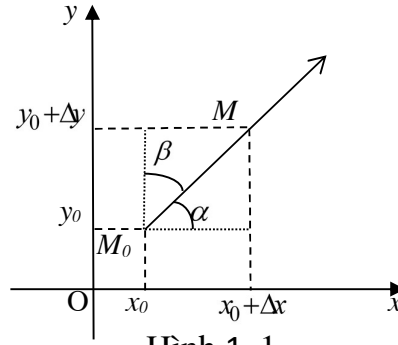
Phương trình mặt mức trong trường điện thế là

$$\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = C \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{q^2}{C^2} = R^2.$$

Các mặt cầu tâm $O(0,0,0)$ bán kính R là các mặt mức và còn được gọi là **mặt đẳng thế**.

b) Đạo hàm theo hướng

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên miền $D \subset R^2$. Trong mục trước ta đã xét các đạo hàm riêng theo biến x khi cố định biến y và theo biến y khi cố định biến x , trong mục này cho cả x, y biến đổi đồng thời theo một hướng nào đó. Chẳng hạn qua điểm $M_0(x_0, y_0)$ ta vẽ đường thẳng định hướng tạo với trục Ox một góc là α , với trục Oy một góc $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$



Hình 1.1

Trên đường thẳng đó xác định một véc tơ đơn vị là $\vec{l} = \{\cos \alpha, \cos \beta\}$ ($\cos \alpha, \cos \beta$ gọi là cosin chỉ hướng của $\vec{l}$), điểm $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ là một điểm trên đường thẳng (Hình 1.1), thì $\overrightarrow{M_0M} = \rho \vec{l}$, trong đó $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ nếu $\overrightarrow{M_0M}$ cùng chiều với $\vec{l}$ và $\rho = -\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ nếu $\overrightarrow{M_0M}$ ngược chiều với $\vec{l}$.

Định nghĩa 1. Ta gọi giới hạn

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\rho}$$

(nếu tồn tại hữu hạn) là đạo hàm của hàm số $z = f(x, y)$ theo hướng $\vec{l}$ tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ và ký hiệu $\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{l}}$. Như vậy

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{l}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\rho}.$$

Ta thấy rằng $\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{l}}$ không những phụ thuộc vào điểm $M_0(x_0, y_0)$ mà còn phụ thuộc vào hướng $\vec{l}$.

Đặc biệt khi $\vec{l}$ cùng hướng của trục Ox (khi đó $\rho = \Delta x$), ta có

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{l}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}.$$

Vậy đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}$ là đạo hàm của hàm f theo hướng của trục Ox . Tương tự $\frac{\partial f}{\partial y}$ là đạo hàm của hàm f theo hướng của trục Oy .

Chú ý. Đạo hàm theo hướng $\vec{l}$ tại điểm M_0 của trường vô hướng u thể hiện tốc độ biến thiên của trường vô hướng u tại điểm M_0 theo hướng $\vec{l}$.

Định lý 1. Nếu hàm số $z = f(x, y)$ khả vi tại điểm M_0 thì tại điểm đó nó có đạo hàm theo mọi hướng $\vec{l}$ và

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \cos \beta, \quad (15)$$

trong đó $\vec{l} = \{\cos \alpha, \cos \beta\}$.

Chứng minh: Hàm số $z = f(x, y)$ khả vi tại điểm M_0 , do đó

$$\Delta f = f(M) - f(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \Delta y + o(\rho),$$

trong đó $o(\rho)$ là VCB bậc cao hơn ρ . Ta có $\Delta x = \rho \cos \alpha$, $\Delta y = \rho \cos \beta$, nên

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \cos \beta + o(\rho).$$

Chuyển qua giới hạn $\rho \rightarrow 0$ ta có (15).

Chú ý: Đối với hàm số ba biến số $u = f(x, y, z)$, định nghĩa đạo hàm theo hướng tương tự hàm số hai biến số và có công thức

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \cos \gamma \quad (15')$$

trong đó $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ là cosin chỉ hướng của $\vec{l}$ trong không gian.

Ví dụ 1. Tìm đạo hàm của hàm $z = x^2 - xy + y^2$ tại điểm $M(1; 1)$ theo hướng $\vec{l} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$ trong đó $\vec{i}, \vec{j}$ tương ứng là các vectơ đơn vị của trục Ox và Oy .

Ví dụ 2. Tìm đạo hàm của hàm $u = xy^2z^3$ tại điểm $M(3; 2; 1)$ theo hướng véc tơ $\overrightarrow{MN}$ với $N(5; 4; 2)$.

1.2.4. Gradient của hàm số

Định nghĩa 1. Cho hàm số $z = f(x, y)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0)$. Ta gọi **gradient** của hàm số f tại M_0 là véc tơ có các thành phần là

$$\left\{ \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \right\}$$

và ký hiệu $\overrightarrow{\text{grad}} f(M_0)$ (đọc là gờatđiên của f tại M_0). Như vậy

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \vec{j} \quad (16)$$

trong đó $\vec{i}, \vec{j}$ là các véc tơ đơn vị của các trục Ox và Oy .

Đối với hàm ba biến số $u = f(x, y, z)$ ta có

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \vec{k}, \quad (17)$$

trong đó $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các véc tơ đơn vị của các trục Ox, Oy, Oz và có các tính chất như hàm số hai biến số.

Cho trường vô hướng $u = f(x, y, z)$ trên miền Ω . Nếu hàm vô hướng $u = f(x, y, z)$ khả vi tại điểm $M(x, y, z) \in \Omega$, thì tại điểm đó có đạo hàm theo hướng $\vec{l}$:

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f(M)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(M)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f(M)}{\partial z} \cos \gamma,$$

trong đó $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ là cosin chỉ hướng của vectơ $\vec{l}$.

Ta gọi **gradient** của trường vô hướng u tại M là vectơ có các thành phần là

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x}, \frac{\partial u(M)}{\partial y}, \frac{\partial u(M)}{\partial z}.$$

Ký hiệu $\overrightarrow{\text{grad}} u(M)$. Như vậy

$$\overrightarrow{\text{grad}} u(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u(M)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u(M)}{\partial z} \vec{k}$$

trong đó $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các véc tơ đơn vị của các trục Ox, Oy, Oz .

Tại mỗi điểm $M(x, y, z) \in \Omega$ của trường vô hướng $u = f(x, y, z)$ có vectơ $\overrightarrow{\text{grad}} u(M)$ tương ứng. Tất cả các vectơ đó tạo thành trường vectơ gradient.

Từ định nghĩa của gradient, ta dễ dàng suy ra:

- 1) $\overrightarrow{\text{grad}} (u_1 + u_2 - u_3) = \overrightarrow{\text{grad}} u_1 + \overrightarrow{\text{grad}} u_2 - \overrightarrow{\text{grad}} u_3$.
- 2) $\overrightarrow{\text{grad}} (cu) = c \overrightarrow{\text{grad}} u (c = \text{const})$.
- 3) $\overrightarrow{\text{grad}} (uv) = u \overrightarrow{\text{grad}} v + v \overrightarrow{\text{grad}} u$.
- 4) $\overrightarrow{\text{grad}} f(u) = f'(u) \overrightarrow{\text{grad}} u$.

Theo công thức (16), (17) ta có

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = (\overrightarrow{\text{grad}} f, \vec{l}) = |\overrightarrow{\text{grad}} f| |\vec{l}| \cdot \cos \varphi = \text{ch}_{\vec{l}} \overrightarrow{\text{grad}} f \quad (18)$$

trong đó $\vec{l} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$, φ là góc giữa $\overrightarrow{\text{grad}} f$ và $\vec{l}$.

Từ (17) ta có một số tính chất của đạo hàm theo hướng

- 1) Đạo hàm có giá trị lớn nhất tại điểm (x, y) theo hướng của vectơ gradient tại điểm đó và bằng $|\overrightarrow{\text{grad}} f|$.
- 2) Đạo hàm có giá trị nhỏ nhất, là theo hướng đối của vectơ gradient và bằng $-|\overrightarrow{\text{grad}} f|$.

Chú ý.

(1) Theo hướng $\vec{l}$, trường vô hướng u tăng nhanh nhất tại M_0 nếu $\vec{l}$ có cùng phương, cùng hướng với $\overrightarrow{\text{grad}} u$.

(2) Theo hướng $\vec{l}$, trường vô hướng u giảm nhanh nhất tại M_0 nếu $\vec{l}$ có cùng phương, ngược hướng với $\overrightarrow{\text{grad}} u$.

Ví dụ 1. Cho hàm $u = x^2 y^2 z^2$. Xác định $\overrightarrow{\text{grad}} u$ tại điểm $M(1; -1; 3)$ và tính đạo hàm tại M theo hướng véc tơ $\vec{l} = \overrightarrow{MN}$ với $N(0; 1; 1)$.

Ví dụ 2. Cho hàm $u = x^3 + y^3 + z^3 + 4xyz$. Xác định $\overrightarrow{\text{grad}} u$ tại điểm $M(1; 2; -1)$ và tính đạo hàm tại M theo hướng véc tơ $\vec{l} = \overrightarrow{MN}$ với $N(2; 0; 1)$.

Ví dụ 3. (2022) Tìm hướng mà tại $M(-1; 2; 1)$ hàm số $f(x, y, z) = xyz$ giảm nhanh nhất. Tính đạo hàm theo hướng này tại M .

1.2.5. Mặt

Cho mặt cong (S) xác định bởi phương trình $f(x, y, z) = 0$ tại điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ là **một điểm chính quy** của mặt (S)

+ Vecto pháp tuyến $\{f'_x(M), f'_y(M), f'_z(M)\}$ tại M .

+ Phương trình pháp tuyến tại M

$$(d): \frac{x - x_0}{f'_x(M)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M)} = \frac{z - z_0}{f'_z(M)}.$$

+ Phương trình tiếp diện tại M

$$(P): f'_x(M) \cdot (x - x_0) + f'_y(M) \cdot (y - y_0) + f'_z(M) \cdot (z - z_0) = 0.$$

Nhận xét: Nếu mặt cong cho bởi phương trình $z = z(x, y)$ thì phương trình tiếp diện tại M : $(P): z - z_0 = z'_x(M) \cdot (x - x_0) + z'_y(M) \cdot (y - y_0)$.

Ví dụ 1.

a) (2018) Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong $x^2 + y^2 - e^z - 2xyz = 0$ tại điểm $P(1; 0; 0)$.

b) (2005) Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ tại điểm $M(3; 4; 5)$.

c) (20242) Cho mặt cong S xác định bởi $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 0$. Viết phương trình tiếp diện tại điểm $M(-2, \sqrt{10}, 2)$ và pháp tuyến tại điểm $N(\sqrt{5}, 1, -1)$.

Bài tập

1.(2018) Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến tại điểm $A(0; 1; 2)$ của mặt $z = 2ye^{\sin x}$.

2.(20172) Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong $\ln(x^2 + 3y) - 2z^3 = 2$ tại điểm $M(1; 0; -1)$.

3.(20182) Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ tại điểm $M(2; 2; 3)$.

1.2.6. Một số mặt bậc hai trong không gian

Phương trình bậc hai ba biến tổng quát có dạng

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + M = 0.$$

Bằng một số phép biến đổi ta có thể đưa phương trình trên về một trong các dạng sau đây gọi là dạng chính tắc của các mặt bậc hai:

(1) **Mặt cầu** $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, tâm $O(0; 0; 0)$, bán kính R (Hình 1.14).

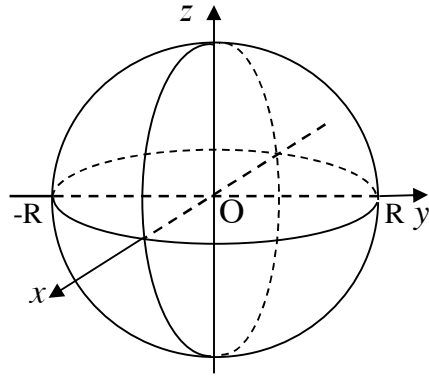
Mặt cầu cắt các mặt tọa độ theo các đường tròn

$$z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2, y = 0 \Rightarrow x^2 + z^2 = R^2, x = 0 \Rightarrow y^2 + z^2 = R^2.$$

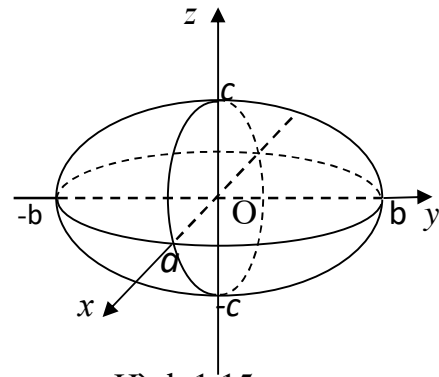
(2) **Mặt elipxôit** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, tâm $O(0; 0; 0)$, a, b, c là các bán trục (Hình 1.15).

Mặt elipxôit cắt các mặt tọa độ theo các đường elip

$$z = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Hình 1.14



Hình 1.15

(3) **Mặt parabolôit eliptic** $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ đỉnh $O(0; 0; 0)$, a, b là các bán trục (Hình 1.16).

Mặt parabolôit eliptic cắt các mặt tọa độ theo các đường parabol

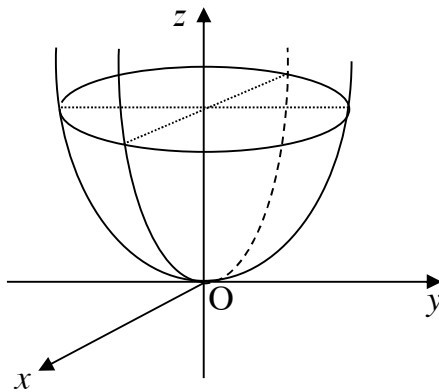
$$y = 0 \Rightarrow z = \frac{x^2}{a^2}, x = 0 \Rightarrow z = \frac{y^2}{b^2}.$$

Khi $z = \text{const} > 0$ thì thiết diện song song với mặt phẳng Oxy là elip.

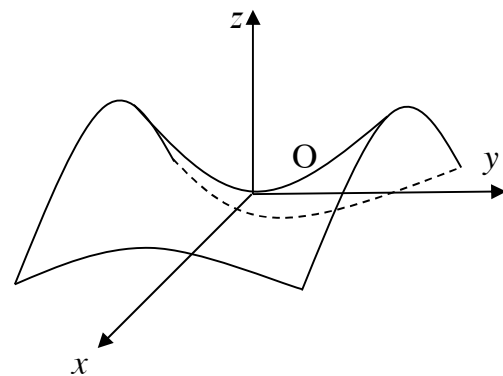
(4) **Mặt parabolôit hyperbolic** $z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ (Hình 1.17).

Mặt parabolôit hyperbolic cắt các mặt tọa độ theo các đường parabol

$$y = 0 \Rightarrow z = -\frac{x^2}{a^2}, x = 0 \Rightarrow z = +\frac{y^2}{b^2}.$$



Hình 1.16



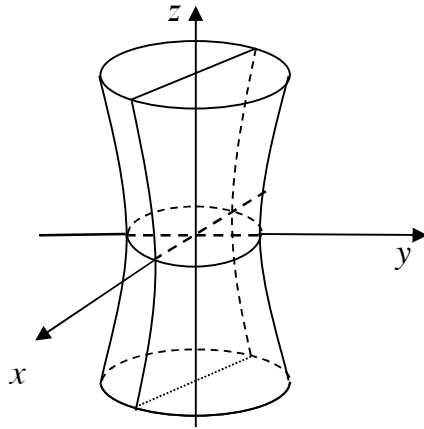
Hình 1.17

(5) **Mặt hyperbolôit một tầng** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (Hình 1.18).

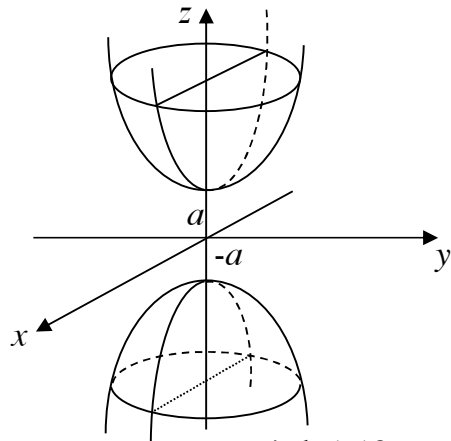
Mặt hyperbolôit một tầng cắt các mặt tọa độ theo các đường sau

$$z = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

6) **Mặt hyperbolôit hai tầng** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ (Hình 1.19).



Hình 1.18



Hình 1.19

Mặt hyperbolôit hai tầng không cắt mặt tọa độ $z = 0$, cắt các mặt tọa độ $x = 0$, $y = 0$ theo các đường hyperbol

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

(7) **Mặt nón** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (Hình 1.20).

(8) **Mặt trụ bậc hai**

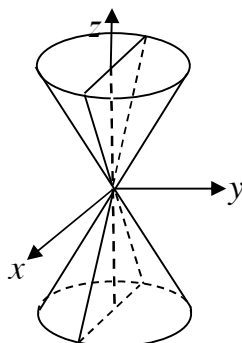
Xét mặt cong (S) xác định bởi phương trình $f(x, y) = 0$, không chứa z . Trên mặt phẳng $z = 0$, phương trình $f(x, y) = 0$ xác định đường cong (C). Mặt cong (S) được sinh ra bởi đường thẳng (gọi là *đường sinh*) luôn song song với trục Oz và tựa vào đường cong (C), (đường cong (C) gọi là *đường chuẩn*). Mặt cong (S) gọi là *mặt trụ* đúng.

Tương tự đối với phương trình không chứa x (hoặc y) xác định mặt trụ có đường sinh song song với trục Ox (hoặc Oy).

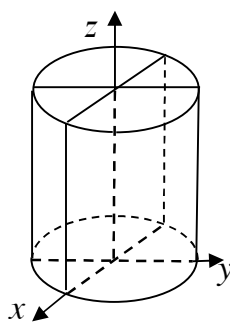
Mặt trụ elliptic $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Hình 1.21);

Mặt trụ hyperbolic $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Hình 1.22);

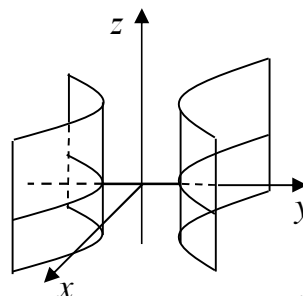
Mặt trụ parabol $z = \frac{x^2}{a^2}$ (Hình 1.23).



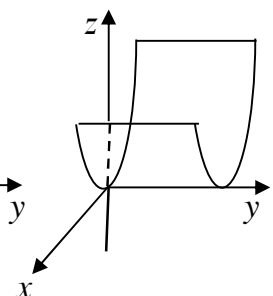
Hình 1.20



Hình 1.21



Hình 1.22



Hình 1.23

TÍCH PHÂN BỘI

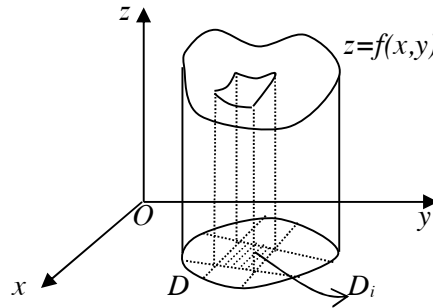
2.1. Tích phân kép

2.1.1. Định nghĩa tích phân kép

Định nghĩa 2.1.1. Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong miền đóng và giới nội D của mặt phẳng Oxy . Chia miền D một cách tùy ý thành n mảnh nhỏ $D_1, D_2, \dots, D_n$ không giao nhau ($D_i \cap D_j = \Phi, i \neq j$). Gọi Δs_i là diện tích của mảnh nhỏ D_i . Trong mỗi mảnh nhỏ D_i lấy một điểm tùy ý $M_i(x_i, y_i)$. Lập tổng

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i$$

gọi là **tổng tích phân** của hàm số $f(x, y)$ trong miền D .



Hình 2.1

Nếu khi $n \rightarrow \infty$ sao cho $\max d_i \rightarrow 0$ (trong đó d_i ký hiệu đường kính của D_i , đó là khoảng cách lớn nhất của hai điểm bất kỳ thuộc D_i) mà I_n dần tới một giới hạn hữu hạn I không phụ thuộc vào cách chia miền D và cách lấy điểm M_i trong mỗi mảnh D_i , thì giới hạn đó được gọi là **tích phân kép** (tích phân hai lớp) của hàm số $f(x, y)$ trong miền D và ký hiệu $\iint_D f(x, y) dS$.

$$\text{Như vậy } \iint_D f(x, y) dS = \lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i. \quad (1)$$

Hàm số $f(x, y)$ gọi là hàm dưới dấu tích phân, D là miền lấy tích phân, dS là yếu tố diện tích. Nếu tồn tại tích phân (1), thì ta nói hàm số $f(x, y)$ khả tích trong miền D .

Vì tích phân kép không phụ thuộc vào cách chia miền D thành các mảnh nhỏ, nên ta có thể chia D bằng các đường thẳng song song với các trục tọa độ, do đó $\Delta S = \Delta x \cdot \Delta y$ và ta có thể thay $dS = dxdy$. Khi đó ta thường viết

$$\iint_D f(x, y) dS = \iint_D f(x, y) dxdy.$$

Người ta chứng minh được rằng nếu hàm số $f(x, y)$ liên tục trong miền đóng và giới nội D thì nó khả tích trong miền đó.

Ý nghĩa hình học của tích phân kép:

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Trường hợp $f(x, y) = 1$, $S_D = \iint_D dx dy$ là công thức tính diện tích miền phẳng D .

2.1.2. Tính chất của tích phân kép

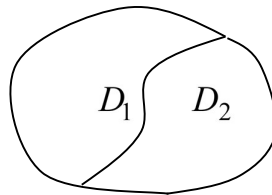
Tương tự như tích phân xác định, tích phân kép cũng có các tính chất sau

$$1) \iint_D [f(x, y) + g(x, y)] dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_D g(x, y) dx dy.$$

$$2) \iint_D kf(x, y) dx dy = k \iint_D f(x, y) dx dy, k \text{ là hằng số.}$$

3) Nếu miền D được chia thành hai miền D_1 và D_2 (Hình 2.2) không dẫm lên nhau $D = D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 = \emptyset$ thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$



Hình 2.2

4) Nếu $f(x, y) \leq g(x, y)$ với $\forall (x, y) \in D$ thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy.$$

5) Nếu $m \leq f(x, y) \leq M$ với $\forall (x, y) \in D$, m và M là các hằng số thì

$$mS_D \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq MS_D,$$

trong đó S_D là diện tích của miền D .

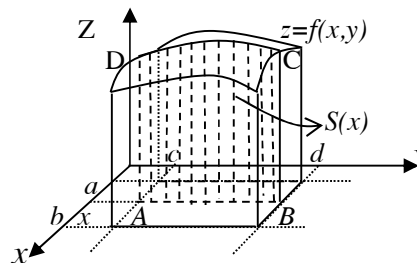
6) (Định lý về giá trị trung bình) Nếu hàm số $f(x, y)$ liên tục trong miền đóng và bị chặn D thì trong D tồn tại ít nhất điểm (x_0, y_0) sao cho

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0) \cdot S_D.$$

Các tính chất trên được suy ra từ định nghĩa tích phân kép.

2.1.3. Cách tính tích phân kép trong hệ tọa độ đề các

1) Trường hợp hàm số $f(x, y) \geq 0$ liên tục trong miền D là hình chữ nhật $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ (Hình 2.3).



Hình 2.3

Theo ý nghĩa hình học của tích phân kép thì $\iint_D f(x, y) dx dy$ là thể tích của hình trụ có đáy là miền D , mặt trên là mặt cong $z = f(x, y)$, mặt xung quanh là mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz .

Chú ý. Trong phần ứng dụng tính thể tích bằng tích phân xác định, ta có

$$V = \int_a^b S(x) dx \quad (2)$$

trong đó $S(x)$ là diện tích của thiết diện vuông góc với trục Ox tại $x \in [a, b]$ của vật thể, đó là diện tích của hình thang cong $ABCD$ được tính theo công thức

$$S(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad (3)$$

(trong công thức (3) ta coi x là hằng số). Thay (3) vào (2) ta được

$$V = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \quad \text{Hay} \quad \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \quad (4)$$

Ta thường ký hiệu $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$.

Chú ý: Đối với công thức (2) ta có thể tính $V = \int_c^d S(y) dy$, (5)

trong đó $S(y)$ là diện tích của thiết diện vuông góc với trục Oy tại $y \in [c, d]$ của

vật thể, được tính theo công thức $S(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, (6)

(trong công thức (6) ta coi y là hằng số).

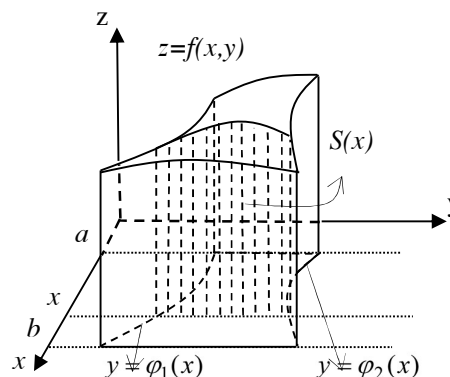
Vậy $V = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$ hay $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$. (7)

Từ (4) và (7) ta có $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$. (8)

Công thức (8) gọi là công thức đổi thứ tự lấy tích phân (FUBINI).

2) Trường hợp hàm số $f(x, y) \geq 0$ liên tục trong miền D

a) Nếu miền D xác định bởi $a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, các hàm $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trên khoảng mở (a, b) (Hình 2.4).



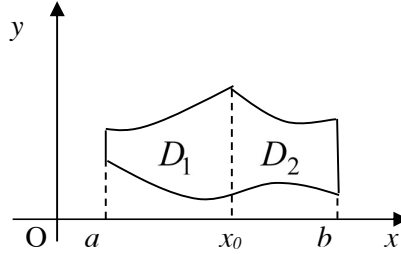
Hình 2.4

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_a^b S(x) dx, & S(x) &= \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \\ \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \end{aligned} \quad (9)$$

Trong công thức (9) khi tính theo y ta coi x là hằng số.

Chú ý: Trường hợp đường cong $y = \varphi_1(x)$ hoặc $y = \varphi_2(x)$ không tồn tại đạo hàm tại điểm $x = x_0 \in (a, b)$, thì miền D được chia thành hai miền D_1 và D_2 ($D = D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 = \emptyset$) (Hình 2.5)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$



Hình 2.5

b) Nếu miền D xác định bởi $c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$ ta có

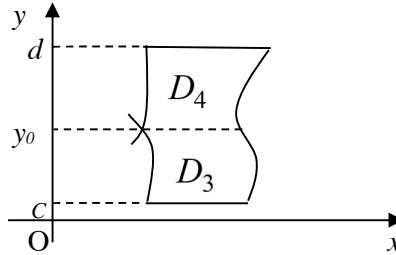
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (10)$$

Cũng như công thức (9), trong công thức (10) là tính theo x trước, tính theo y sau.

Chú ý: Trường hợp đường cong $x = \psi_1(y)$ hoặc $x = \psi_2(y)$ không tồn tại đạo hàm tại điểm $y = y_0 \in (c, d)$, thì D được chia thành hai miền D_3 và D_4

($D = D_3 \cup D_4, D_3 \cap D_4 = \emptyset$) (Hình 2.6) và

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_3} f(x, y) dx dy + \iint_{D_4} f(x, y) dx dy$$



Hình 2.6

3) Trường hợp hàm $f(x, y) \leq 0$ liên tục trong miền D công thức (9) và (10) vẫn đúng.

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \int_0^1 dx \int_x^{2x} (x - y) dy$.

Ví dụ 2. Tính tích phân $I = \iint_D x^2 y dx dy$, trong đó D là miền phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2, x + y = 2, x = 0, (x \geq 0)$.

Ví dụ 3. Đổi thứ tự lấy tích phân sau $I = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{2-x} f(x, y) dy$.

Ví dụ 4. (20232) Đổi thứ tự lấy tích phân $I = \int_{-2}^2 dy \int_{y^2-5}^{-1} f(x, y) dx$.

Ví dụ 5. (B7) Tính tích phân sau $I = \int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx$.

Chú ý: Giả sử $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ xác định trên miền D là hình chữ nhật $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ thì khi đó

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_c^d f_2(y) dy.$$

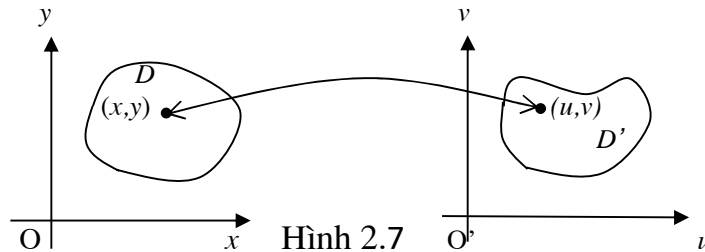
Ví dụ 6. Tính tích phân $I = \iint_D xy^2 dx dy$, D là miền $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

2.1.4. Đổi biến số trong tích phân kép

a) Đổi biến số trong tích phân kép

Xét tích phân kép $\iint_D f(x, y) dx dy$, trong đó hàm số $f(x, y)$ liên tục trong miền D đóng, giới nội. Thực hiện phép đổi biến số

$$x = x(u, v), y = y(u, v). \quad (11)$$



Hình 2.7

Định thức Jacobi $J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ trong miền D' .

Khi đó ta có $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv. \quad (12)$

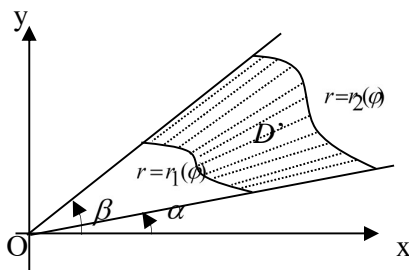
Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \iint_D (x + y)(2x - y) dx dy$, D là miền phẳng giới hạn bởi $-x \leq y \leq 1 - x, 2x \leq y \leq 2x + 1$.

Ví dụ 2. (20243) Tính tích phân $I = \iint_D (2x^2 - 4y^2) dx dy$, D là miền phẳng giới hạn bởi $1 \leq xy \leq 4, x \leq y \leq 4x$.

b) Tích phân kép trong hệ tọa độ cực

Thực hiện phép đổi biến số sang hệ tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}, \quad 0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (13)$$



Hình 2.8

khi đó miền D của mặt phẳng Oxy trở thành miền D' (Hình 2.8) trong hệ tọa độ cực giới hạn bởi $\alpha \leq \varphi \leq \beta, r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)$.

Ta có $J = \frac{D(x,y)}{D(r,\phi)} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix} = r$. Vậy

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\phi \int_{r_1(\phi)}^{r_2(\phi)} f(r \cos \phi, r \sin \phi) r dr. \quad (14)$$

Chú ý 1: Xác định cận của một số miền D trong hệ tọa độ cực

1) Gốc cực O (điểm trong) nằm trong D (Hình 2.9).

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{r(\phi)} f(r \cos \phi, r \sin \phi) r dr.$$

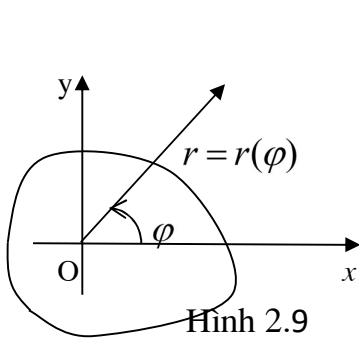
2) Gốc cực O (điểm biên) nằm trên biên của D (Hình 2.10).

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\phi \int_0^{r(\phi)} f(r \cos \phi, r \sin \phi) r dr.$$

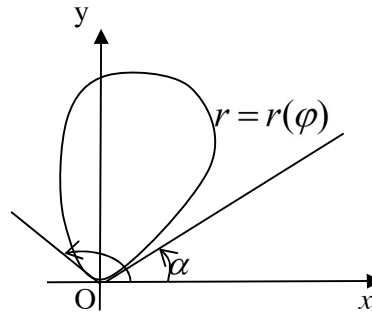
3) Gốc cực O nằm ngoài D (Hình 2.11).

Khi đó miền D được xác định bởi $\alpha \leq \phi \leq \beta, r_1(\phi) \leq r \leq r_2(\phi)$ và

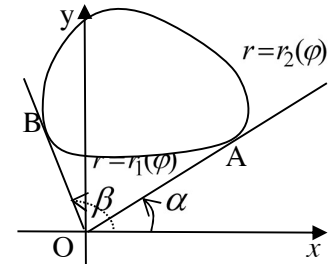
$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\phi \int_{r_1(\phi)}^{r_2(\phi)} f(r \cos \phi, r \sin \phi) r dr.$$



Hình 2.9



Hình 2.10



Hình 2.11

Chú ý 2: Trường hợp biên miền D có phương trình $r = r(\phi)$ tồn tại điểm $\phi \in (\alpha, \beta)$ mà tại đó hàm không khả vi thì tách miền D thành $D = D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 = \emptyset$ như trong trường hợp tính trong hệ tọa độ đề các vuông góc.

Ví dụ 3. Chuyển sang hệ tọa độ cực tính tích phân $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, trong đó D là hình tròn $x^2 + y^2 \leq 1$.

Ví dụ 4. Tính tích phân $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, trong đó D là miền phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{2x - x^2}, y = 0$.

Ví dụ 5. Chuyển sang hệ tọa độ cực tính tích phân

$$I = \iint_D \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad D \text{ là hình vành khăn } \frac{\pi^2}{9} \leq x^2 + y^2 \leq \pi^2.$$

Chú ý: Trong trường hợp biên của miền D là đường elip hoặc một phần của đường elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ta có thể đổi biến $x = ar \cos \phi, y = br \sin \phi$ (15)

(tọa độ cực mở rộng). Khi đó miền D trở thành miền D' và $J = \frac{D(x,y)}{D(r,\phi)} = abr$.

Ví dụ 6. Tính $I = \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy, D$ là hình elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

Ví dụ 7.(20221) Tính $I = \iint_D (2y + 1) dx dy$, D là miền tam giác với các đỉnh $(0,0)$; $(1,1)$ và $(0,2)$.

Ví dụ 8. (20222) Tính $I = \iint_D (|x| - |y| + (x - y)^2) dx dy$, $D: |x| \leq 1, |y| \leq 1$.

Bài tập

1.(20201) Tính $I = \iint_D xy dx dy$, D là miền giới hạn bởi $y = 0, y = x$ và $x = 1$.

2.(20201) Tính $I = \iint_D (x + y) dx dy$, D là miền $(x - 4)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$.

3.(20182) Tính $I = \iint_D (y^2 - x^2) dx dy$, D là miền $0 \leq 2y \leq x^2 + y^2 \leq 2x$.

4.(20173) Tính $I = \iint_D (x^4 - y^4) dx dy$, D là miền $x = \sqrt{1 - y^2}, x = 0$.

5.(20172) Tính tích phân $I = \iint_D |x + y| dx dy$, D là miền $x^2 + y^2 \leq 1$.

6.(20172) Tính tích phân $I = \int_0^1 dy \int_{2y}^2 e^{x^2} dx$.

7.(20161) Tính $I = \iint_D xy dx dy$, D là miền giới hạn bởi $x = y - 4, x^2 = 2y$.

8.(20162) Tính $I = \iint_D \frac{1}{1+x+y} dx dy$, D là miền giới hạn bởi $y = 0, y = x$ và $x = 1$.

2.1.5. Ứng dụng hình học của tích phân kép

a) Tính thể tích của vật thể

$$V = \iint_D |f(x, y)| dx dy. \quad (17)$$

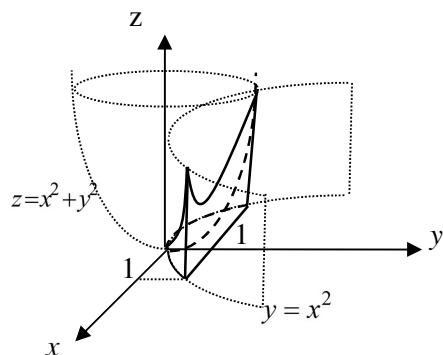
Chú ý: Trong trường hợp miền Ω giới hạn bởi mặt trên $z = f_2(x, y)$ và giới hạn bởi mặt dưới $z = f_1(x, y)$, $(f_1(x, y) \leq f_2(x, y), \forall (x, y) \in D)$, ta có

$$V = \iint_D [f_2(x, y) - f_1(x, y)] dx dy. \quad (18)$$

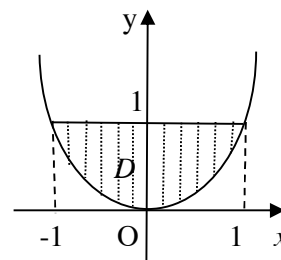
Miền D là hình chiếu của miền Ω lên mặt phẳng Oxy .

Ví dụ 1. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi $0 \leq z \leq 4 - x^2$ phần nằm trong trụ tam giác có phương trình $2x + y = 4, x = 0, y = 0, z = 0$.

Ví dụ 2. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt $Z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0$ (hình 2.12).

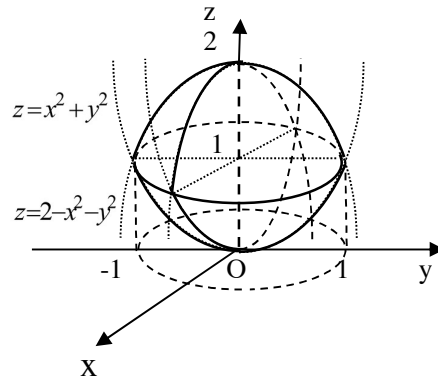


Hình 2.12



Hình 2.13

Ví dụ 3. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi $x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$ (Hình 2.14)



Hình 2.14

Ví dụ 4. (20243) Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt

$$z = 0, z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = x.$$

Ví dụ 5. (20232) Cho Ω giới hạn bởi các mặt $z^2 = 5 + x^2 + y^2$ và $z = 3$. Tính thể tích khối Ω .

b) Tính diện tích của miền phẳng

Từ định nghĩa của tích phân kép, ta có diện tích S của miền phẳng D được tính theo công thức

$$S_D = \iint_D dx dy. \quad (19)$$

Chú ý: Nếu miền D trong hệ tọa độ cực được xác định bởi

$$\alpha \leq \varphi \leq \beta, \quad r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)$$

thì diện tích của miền D là

$$S_D = \iint_D r dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r dr. \quad (20)$$

Ví dụ 6. Tính diện tích của miền phẳng giới hạn bởi các đường

$$y = x^3, y = \sqrt{x}.$$

Ví dụ 7. (20242) Tính diện tích của miền phẳng D nằm trong đường tròn $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ và phía trên đường parabol $y = \sqrt{2}x^2 + 1$.

Ví dụ 8. Tính diện tích của miền phẳng giới hạn bởi các đường

$$y = 2 - x, y^2 = 4x + 4.$$

Ví dụ 9. Tính diện tích của miền phẳng D giới hạn các đường lemniscate

$$r = a\sqrt{\sin 2\varphi}, a > 0.$$

Ví dụ 10. (20243) Tính diện tích của miền phẳng D giới hạn bởi

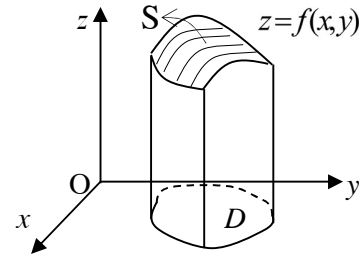
$$x^2 + y^2 = 2y, \quad x^2 + y^2 = 4x, \quad y = x, \quad x = 0.$$

Ví dụ 11. (20232) Tính diện tích của miền phẳng giới hạn bởi

$$9x^2 - 4xy + y^2 \leq 4.$$

c) Tính diện tích của mặt cong

Giả sử khi cần tính diện tích của phần mặt cong S có phương trình $z = f(x, y)$ đơn trị và có hình chiếu lên mặt Oxy là miền phẳng D kín và giới nội (Hình 2.15). Diện tích của mặt cong S được tính theo công thức



Hình 2.15

$$S_c = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (21)$$

Ví dụ 12. Tính diện tích của phần mặt parabolôit $z = 1 - x^2 - y^2$ nằm trong hình trụ $x^2 + y^2 = 1$.

Ví dụ 13. (20222) Tính diện tích của phần mặt phẳng $z = 1 + 2x + y$ trên miền bị chặn $y = x^2, x = y^3$.

Bài tập

- 1.(20172) Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi $z = 1 + x^2 + y^2$, mặt trụ $x^2 + 4y^2 = 4$ và mặt phẳng Oxy .
- 2.(20172) Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt $z = 0$, $z = 1 + x^2 + y^2$ và mặt $4x^2 + y^2 = 4$.
- 3.(20192) Tính thể tích của miền D xác định bởi $1 \leq z \leq \sqrt{5 - x^2 - y^2}$.
- 4.(20182) Tính diện tích của miền D giới hạn bởi $x^2 = y, x^2 = 2y, xy = 2, xy = 4$.
- 5.(20182) Tính diện tích của miền phẳng D giới hạn bởi $(x^2 + x^2)^2 \leq 2x^2y, x \geq 0$.
- 6.(20172) Tính diện tích của mặt paraboloid $x = y^2 + z^2$ thỏa mãn $x \leq 1$.
- 7.(20192) Tính diện tích của mặt paraboloid $z = 4x - x^2 - y^2$ nằm phía trên mặt phẳng Oxy .

2.2. Tích phân bội ba**2.2.1. Định nghĩa tích phân bội ba**

Định nghĩa 1. Cho hàm số $f(x, y, z)$ xác định trong miền đóng và giới nội Ω của không gian $Oxyz$. Chia miền Ω một cách tùy ý thành n miền nhỏ $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ không giao nhau. Gọi ΔV_i là thể tích của mỗi miền nhỏ Ω_i . Trong mỗi miền nhỏ Ω_i lấy một điểm tùy ý $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Lập tổng tích phân

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

Nếu khi $n \rightarrow \infty$ sao cho $\max d(\Omega_i) \rightarrow 0$ (trong đó $d(\Omega_i)$ ký hiệu đường kính của Ω_i , đó là khoảng cách lớn nhất của hai điểm bất kỳ thuộc Ω_i) mà I_n dần tới một giới hạn hữu hạn I không phụ thuộc vào cách chia miền Ω và cách lấy điểm M_i trong mỗi miền nhỏ Ω_i , thì giới hạn đó được gọi là tích phân bội ba của hàm số $f(x, y, z)$ trong miền Ω và ký hiệu $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$.

Như vậy
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \lim_{\max d(\Omega_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i. \quad (1)$$

Nếu tích phân (1) tồn tại thì ta nói hàm số $f(x, y, z)$ khả tích trong miền Ω .

Khi tích phân bội ba tồn tại thì không phụ thuộc vào cách chia miền Ω thành các miền nhỏ, nên ta có thể chia Ω bằng các mặt phẳng song song với các mặt phẳng tọa độ, do đó $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ và ta có thể thay $dV = dxdydz$, nên

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz. \quad (2)$$

+Người ta chứng minh được rằng nếu hàm số $f(x, y, z)$ liên tục trong miền đóng và giới nội Ω thì nó khả tích trong miền đó.

+Tích phân bội ba cũng có các tính chất tương tự như tích phân kép.

2.2.2. Cách tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ đề các

Cho miền Ω được giới hạn bởi các mặt $z = z_1(x, y)$ và $z = z_2(x, y)$, ($z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$) trong đó các hàm $z_1(x, y), z_2(x, y)$ là những hàm số liên tục trong miền D ; D là hình chiếu vuông góc của miền Ω lên mặt phẳng Oxy .

Ta có

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz &= \iint_D \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dxdy = \\ &= \iint_D dxdy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

Cũng như tính tích phân kép, khi tính theo z thì ta coi x, y là hằng số và dẫn đến tích phân kép trên miền D . Chẳng hạn miền D được xác định bởi

$$a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$$

thì

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (3)$$

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \iiint_{\Omega} \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, trong đó Ω là miền được giới hạn bởi mặt $x + y + z = 1$ và các mặt phẳng tọa độ $x = 0, y = 0, z = 0$.

Ví dụ 2. (20232) Tính tích phân $I = \iiint_{\Omega} \frac{dxdydz}{1+z^7}$, trong đó Ω là miền

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, \sqrt[3]{x} \leq z \leq 1\}$$

Ví dụ 3. Tính tích phân $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dxdydz$, trong đó Ω là miền được giới hạn bởi các mặt $2z = x^2 + y^2, z = 2$.

Ví dụ 4. (B26) Tính tích phân $I = \iiint_{\Omega} x dxdydz$, Ω là miền được giới hạn bởi các mặt $y + z = 1, y = x^2, z = 0$.

2.2.3. Đổi biến số trong tích phân bội ba

a) Đổi biến số trong tích phân bội ba

Xét tích phân
$$\iiint f(x, y, z) dxdydz, \quad (4)$$

trong đó hàm số $f(x, y, z)$ liên tục trong miền Ω .

Thực hiện phép đổi biến số

$$x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w).$$

Giả sử :

1) Các hàm số $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$ cùng các đạo hàm riêng cấp một của nó liên tục trong miền đóng Ω' của không gian $O'uvw$.

2) Các hàm số $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$ xác định sự tương ứng một-một (song ánh) giữa các điểm của miền Ω của không gian $Oxyz$ và các điểm của miền Ω' của không gian $O'uvw$

$$3) \text{ Định thức Jacobi } J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ trong miền } \Omega'.$$

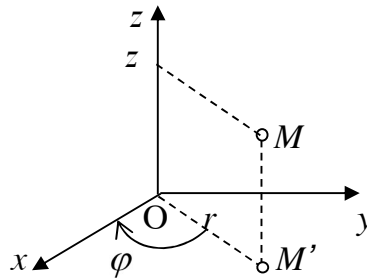
Khi đó tích phân (4) được tính theo công thức

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw. \quad (5)$$

Ví dụ 1. (B27) Tính $I = \iiint_{\Omega} (x+y)(x-y)(x+2y-z) dx dy dz$, trong đó Ω là miền được xác định bởi $0 \leq x+y \leq 1, x \leq y \leq x+2, z+1 \leq x+2y \leq z+3$.

b) Tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ

Điểm $M(x, y, z)$ trong không gian $Oxyz$ có tọa độ trụ là (r, φ, z) , trong đó (r, φ) là tọa độ cực của điểm $M'(x, y)$ hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng Oxy (Hình 2.16).



Hình 2.16

Công thức liên hệ giữa tọa độ đề các và tọa độ trụ là

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \text{ với } \begin{cases} 0 \leq \varphi < 2\pi \\ 0 \leq r < +\infty \\ -\infty < z < +\infty \end{cases} \quad (6)$$

Định thức Jacobi của phép biến đổi trên là $J = r$. Khi đó ta có

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz.$$

Ví dụ 2. Tính tích phân $I = \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, trong đó Ω là miền được giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 2x$ và các mặt phẳng $z = a, z = 0, a > 0$.

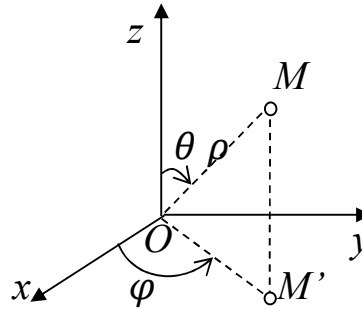
Ví dụ 3. (20222) Tính tích phân $I = \iiint_V x dx dy dz$, trong đó V là vật thể bị chặn bởi các mặt $z = x^2 + y^2 - 1, z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Ví dụ 4. (20242) Tính tích phân $I = \iiint_V (x^2 + 2y^2) dx dy dz$, trong đó V là miền phía trong mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt trụ $x^2 + y^2 = 3$.

Ví dụ 5. (B28) Tính tích phân $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$, trong đó Ω là miền được giới hạn bởi các mặt $2z = x^2 + y^2, z = 2$.

c) Tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu

Điểm $M(x, y, z)$ trong không gian $Oxyz$ có tọa độ cầu là (ρ, φ, θ) , trong đó ρ là độ dài của véc tơ $\overrightarrow{OM}$; φ là góc giữa chiều dương của trục Ox và $\overrightarrow{OM'}$ (M' là hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng Oxy); θ là góc giữa chiều dương của trục Oz và $\overrightarrow{OM}$ (Hình 2.17).



Hình 2.17

Công thức liên hệ giữa tọa độ đề các và tọa độ cầu là

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \theta \end{cases} \quad \text{với} \quad \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \rho < +\infty. \end{cases} \quad (7)$$

bằng phép biến đổi trên thì định thức Jacobi là $J = \rho^2 \sin \theta$. Khi đó ta có

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\varphi d\rho d\theta. \quad (8)$$

Ví dụ 6. Tính tích phân $I = \iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, trong đó Ω là miền được giới hạn bởi mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và các mặt phẳng tọa độ $x = 0, y = 0, z = 0$, (trong góc phần tám thứ nhất).

Ví dụ 7. (20243) Tính tích phân $I = \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, trong đó Ω là nửa khối elipxoit $\frac{x^2 + y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1, z \geq 0$.

Ví dụ 8. (B29) Tính $I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, Ω là miền giới hạn bởi mặt cầu $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ và mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Chú ý. Ví dụ 8 có thể giải bằng cách đổi biến sang hệ tọa độ cầu hoặc hệ tọa độ trụ.

2.2.4. Ứng dụng của tích phân bội ba

a) Tính thể tích của vật thể

Thể tích V của vật thể chiếm miền Ω trong không gian là

$$V = \iiint_{\Omega} dx dy dz.$$

Ví dụ 1.(20233) Tính thể tích của vật thể V được giới hạn bởi

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq xy.$$

Ví dụ 2. (20232) Tính thể tích phần hình cầu $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ nằm trong mặt nón $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$.

Ví dụ 3. (B31) Tính thể tích của vật thể Ω được giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$ và các mặt phẳng $x + z = 2, x = 0, y = 0, z = 0$ (trong góc phần tám thứ nhất)

Ví dụ 4. (B32) Tính thể tích của vật thể Ω nằm giữa mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$.

b) Tính khối lượng (tham khảo)

Nếu $\rho(x, y, z)$ là khối lượng riêng của vật thể Ω tại điểm $M(x, y, z)$ thì khối lượng của vật thể đó là

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Ví dụ 5.(B33) Tính khối lượng của hình lập phương $\Omega: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ biết mật độ tại điểm (x, y, z) là $\rho(x, y, z) = x + y + z$.

Bài tập:

- (20201) Tính tích phân $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$, trong đó Ω là miền được giới hạn bởi mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z$.
- (20192) Tính tích phân $I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, trong đó Ω là miền được giới hạn bởi $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$.
- (2019) Tính $I = \iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{2x + z^2 + 1}}$, V là miền giới hạn bởi $0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq x, 0 \leq y \leq z$
- (20192) Tính $I = \iiint_{\Omega} (z + 1) dx dy dz$, Ω là miền được giới hạn bởi $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$.
- (20192) Tính $I = \iiint_V \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2 + 2}$, V là miền được giới hạn bởi $\sqrt{x^2 + y^2 - 1} \leq z \leq 1$.
- (20182) Tính tích phân $I = \iiint_V z dx dy dz$, V là miền được giới hạn bởi $(x + 2y)^2 + 4z^2 = 1$ trong góc phần tám thứ nhất và các mặt phẳng tọa độ.
- (20182) Tính tích phân $I = \iiint_V x \sqrt{y^2 + z^2} dx dy dz$, V là miền được giới hạn bởi $y^2 + z^2 \leq x^2 + 1, 0 \leq x \leq \sqrt{3}$ t.
- (20173) Tính tích phân $I = \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, Ω là khối cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.
- (20172) Tính tích phân $I = \iiint_V xz dx dy dz$, V là miền thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z \leq -2$.

Chương 3

TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

3.1. Tích phân xác định phụ thuộc tham số

3.1.1 Định nghĩa

Xét tích phân xác định phụ thuộc tham số: $I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ trong đó $f(x, y)$ khả tích theo x trên $[a, b]$ với mỗi $y \in [c, d]$. Rõ ràng tích phân ấy phụ thuộc y .

3.1.2 Các tính chất của tích phân xác định phụ thuộc tham số.

a) Tính liên tục

Định lý 1. Nếu $f(x, y)$ là hàm số liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ thì $I(y)$ là hàm số liên tục trên $[c, d]$. Tức là:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = I(y_0) \Leftrightarrow \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b f(x, y_0)dx.$$

b) Tính khả vi

Định lý 2. Giả sử với mỗi $y \in [c, d]$, $f(x, y)$ là hàm số liên tục theo x trên $[a, b]$ và $f'_y(x, y)$ là hàm số liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ thì $I(y)$ là hàm số khả vi trên (c, d) và

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)dx$$

hay nói cách khác ta có thể đưa dấu đạo hàm vào trong tích phân.

c) Tính khả tích

Định lý 3. Nếu $f(x, y)$ là hàm số liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ thì $I(y)$ là hàm số khả tích trên $[c, d]$ và:

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

Ví dụ 1. Khảo sát sự liên tục của tích phân $I(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2} dx$, với $f(x)$ là hàm số dương, liên tục trên $[0, 1]$.

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số $I(y) = \int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} dx$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $I(y) = \int_{-1}^1 \sqrt{x^4 + x^2 + y^4} dx$, Xét tính liên tục của $I(y)$. Từ đó tìm giới hạn $\lim_{y \rightarrow 0} I(y)$.

Ví dụ 4. Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/2} \ln(1 + y \sin^2 x) dx$, với $y > 1$.

Ví dụ 5. Tính tích phân $I_n(\alpha) = \int_0^1 x^\alpha \ln^n x dx$, n là số nguyên dương.

Lời giải. – Với mỗi $\alpha > 0$, hàm số $f_n(x, \alpha) = x^\alpha \ln^n x$, $n = 0, 1, 2, \dots$ liên tục theo x trên $[0, 1]$;

– Vì $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln^{n+1} x = 0$ nên $\frac{\partial f_n(x, \alpha)}{\partial \alpha} = x^\alpha \ln^{n+1} x$ liên tục trên $[0, 1] \times (0, +\infty)$.

Nghĩa là hàm số $f_n(x, \alpha) = x^\alpha \ln^n x$ thỏa mãn các điều kiện của Định lý nên:

$$I'_{n-1}(\alpha) = \int_0^1 x^\alpha \ln^{n-1} x dx = \int_0^1 \frac{d}{d\alpha} (x^\alpha \ln^{n-1} x) dx = \int_0^1 x^\alpha \ln^n x dx = I_n(\alpha)$$

Tương tự: $I'_{n-2} = I_{n-1}, \dots, I'_1 = I'_0, \Rightarrow I_n(\alpha) = (I_0(\alpha))^{(n)}$.

Mà $I_0(\alpha) = \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} \Rightarrow I_n(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(\alpha+1)^{n+1}}$.

3.1.3 Tính chất của tích phân phụ thuộc tham số với cận biến đổi.

Xét tích phân phụ thuộc tham số với cận biến đổi

$$J(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx, \quad y \in [c, d]; \quad a \leq a(y), b(y) \leq b \quad \forall y \in [c, d].$$

a) Tính liên tục

Định lý 4. Nếu hàm số $f(x, y)$ liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$, các hàm số $a(y), b(y)$ liên tục trên $[c, d]$ và thỏa mãn điều kiện $a \leq a(y), b(y) \leq b, \forall y \in [c, d]$ thì $J(y)$ là một hàm số liên tục đối với y trên $[c, d]$.

b) Tính khả vi

Định lý 5. Nếu hàm số $f(x, y)$ liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$, $f'_y(x, y)$ liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ và $a(y), b(y)$ khả vi trên $[c, d]$ và thỏa mãn điều kiện $a \leq a(y), b(y) \leq b \quad \forall y \in [c, d]$ thì $J(y)$ là một hàm số khả vi đối với y trên $[c, d]$, và ta có:

$$J'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y) dx + f(b(y), y) \cdot b'_y(y) - f(a(y), y) \cdot a'_y(y).$$

Ví dụ 1. Tìm $\lim_{y \rightarrow 0} \int_y^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2}$.

Ví dụ 2. Tìm giới hạn $\lim_{y \rightarrow 0} \int_y^{\frac{\pi}{2}} \sin(x^2 y + 2x + y^2) dx$.

Ví dụ 3. Cho $I(y) = \int_y^1 \sin(x^2 + xy + y^2) dx$. Tính $I'(0)$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $I(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2} dx$. Tính $I'(1)$.

Ví dụ 5. Cho $I(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - y \cos^2 x) dx$. Chứng minh $I(y)$ khả vi với $y < 1$, tính $I'(-1)$.

Ví dụ 6. Tìm giới hạn $\lim_{y \rightarrow 0} \int_{\sin y}^{\cos^3 y} \frac{1}{3+2xy^2+x^2} dx$.

Ví dụ 7. Khảo sát tính liên tục và khả vi của $I(y) = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2}$.

3.2. Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

3.2.1 Các tính chất của tích phân suy rộng phụ thuộc tham số.

Xét tích phân suy rộng phụ thuộc tham số $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx, y \in [c, d]$. Các kết quả dưới đây tuy phát biểu đối với tích phân suy rộng loại II (có cận vô cùng) nhưng đều có thể áp dụng một cách thích hợp cho trường hợp tích phân suy rộng loại I (có hàm dưới dấu tích phân không bị chặn).

a) Định nghĩa

Ta nói:

+Tích phân suy rộng $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ **hội tụ** đối với $y \in [c, d]$ nếu $\lim_{b \rightarrow +\infty} I_b(y) = I(y)$, trong đó $I_b(y) = \int_a^b f(x, y) dx, b > a$. Tức là:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0 \text{ sao cho } b > B \Rightarrow |I(y) - I_b(y)| < \varepsilon \text{ hay } \left| \int_b^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

(Nói chung số B phụ thuộc ε và $y \in [c, d]$).

+Tích phân suy rộng $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ **hội tụ đều** đối với $y \in [c, d]$ nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0$, số B chỉ phụ thuộc ε , (không phụ thuộc $y \in [c, d]$) sao cho $b > B \Rightarrow \left| \int_b^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$ với $y \in [c, d]$

b) Tiêu chuẩn hội tụ Weierstrass

Định lý 6. Nếu $|f(x, y)| \leq g(x) \quad \forall (x, y) \in [a, +\infty) \times [c, d]$ và nếu tích phân suy rộng $I(y) = \int_a^{+\infty} g(x) dx$ hội tụ, thì TP suy rộng $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ hội tụ đều đối với $y \in [c, d]$.

Ví dụ 1. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(yx)}{1+x^2+y^2} dx$ hội tụ đều với $\forall y \in \mathbf{R}$, vì $\left| \frac{\cos(yx)}{1+x^2+y^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$ với $\forall y \in \mathbf{R}$ và $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ hội tụ.

c) Tính liên tục

Định lý 7. Nếu hàm số $f(x, y)$ liên tục trên $[a, +\infty) \times [c, d]$ và nếu tích phân suy rộng $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ hội tụ đều đối với $y \in [c, d]$ thì $I(y)$ là một hàm số liên tục trên $[c, d]$.

d) Tính khả vi

Định lý 8. Giả sử hàm số $f(x, y)$ xác định trên $[a, +\infty) \times [c, d]$ sao cho với mỗi $y \in [c, d]$, hàm số $f(x, y)$ liên tục đối với x trên $[a, +\infty)$ và $f'_y(x, y)$ liên tục trên $[a, +\infty) \times [c, d]$. Nếu tích phân suy rộng $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ hội tụ và $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y)dx$ hội tụ đều đối với $y \in [c, d]$ thì $I(y)$ là hàm số khả vi trên $[c, d]$ và

$$I'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y)dx.$$

e) Tính khả tích

Định lý 9. Nếu hàm số $f(x, y)$ liên tục trên $[a, +\infty) \times [c, d]$ và nếu tích phân suy rộng $I(y)$ hội tụ đều đối với $y \in [c, d]$ thì $I(y)$ là hàm số khả tích trên $[c, d]$ và ta có thể đổi thứ tự lấy tích phân theo công thức:

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^{+\infty} f(x, y)dx \right) dy = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

Ví dụ 2. Cho hàm số $I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^6+3y+2)}{1+x^6+y^2} dx$. Chứng minh hàm số $I(y)$ liên tục và khả vi trên $\mathbf{R}$.

3.2.2 Các dạng chính tính tích phân suy rộng**Dạng 1. Tính tích phân suy rộng phụ thuộc tham số bằng cách đổi thứ tự lấy tích phân**

Giả sử cần tính $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$:

Bước 1. Biểu diễn $f(x, y) = \int_c^d F(x, y)dy$;

Bước 2. Sử dụng tính chất đổi thứ tự lấy tích phân:

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^d F(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^{+\infty} F(x, y)dx \right) dy.$$

Chú ý: Phải kiểm tra điều kiện đổi thứ tự lấy tích phân trong Định lý đối với tích phân suy rộng hàm số $F(x, y)$.

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} dx, \quad a, b > 0;$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2} dx, \quad a, b > 0;$

c) $I = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx - \sin cx}{x} dx, \quad a, b, c > 0;$

d) $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad 0 < a < b;$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-3^{-x}}{x} dx.$

Ví dụ 2. Dùng phương pháp lấy đạo hàm dưới dấu tích phân, tính $\int_0^{+\infty} \frac{3^{tx}-1}{x9^x} dx, (t < 2)$.

Ví dụ 3. Tính $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x} dx, a, b > 0$.

Dạng 2. Tính tích phân bằng cách đạo hàm qua dấu tích phân.

Giả sử cần tính $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$:

Bước 1. Tính $I'(y)$ bằng cách $I'(y) = \int_a^{+\infty} f_y'(x, y) dx$;

Bước 2. Dùng công thức Newton-Leibniz để khôi phục lại $I(y)$ bằng cách

$$I(y) = \int I'(y) dy.$$

Chú ý: Phải kiểm tra điều kiện chuyển dấu đạo hàm qua tích phân trong Định lý.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng tích phân $I(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(x+y)}{1+x^2} dx$, là một hàm số liên tục khả vi với biến y . Tính $I'(y)$ rồi suy ra biểu thức của $I(y)$.

Ví dụ 5. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x} dx, 0 < a < b$;

b) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} dx, a, b > 0$;

c) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2} dx, a, b > 0$.

Ví dụ 6. Tính tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y)^{n+1}}$.

Giải. Đặt $I_n(y) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y)^{n+1}}$; $f_n(x, y) = \frac{1}{(x^2+y)^{n+1}}$ Khi đó:

$$(I_{n-1}(y))'_y = \left[\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y)^n} \right]'_y = -n \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y)^{n+1}} = -n \cdot I_n(y) \Rightarrow I_n = \frac{-1}{n} \cdot I_{n-1}'$$

Tương tự, $I_{n-1} = \frac{-1}{n-1} \cdot I_{n-2}'$, $I_{n-2} = \frac{-1}{n-2} \cdot I_{n-3}'$, ..., $I_1 = \frac{-1}{1} \cdot I_0'$, Do đó

$$I_n(y) = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot (I_0(y))^{(n)}.$$

$$\text{Mà } I_0(y) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+y} = \frac{1}{\sqrt{y}} \arctan \frac{1}{\sqrt{y}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{y}} \text{ Nên } I_n(y) = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{y^{2n-1}}}$$

Vấn đề còn lại là việc kiểm tra điều kiện chuyển đạo hàm qua dấu tích phân.

Ví dụ 7. Tính tích phân $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx - \sin c}{x} dx, a, b, c > 0$.

Giải. Đặt $I(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx - \sin c}{x} dx$, $f(x, b) = e^{-ax} \frac{\sin bx - \sin c}{x}$

Ta có:

• $f(x, b) = e^{-ax} \frac{\sin bx - \sin c}{x}$ liên tục theo x trên $[0, +\infty)$ với mỗi $a, b, c > 0$.

• $f'_b(x, b) = -e^{-a} \cos bx$ liên tục trên $[0, +\infty) \times (0, +\infty)$.

$$\bullet \int_0^{+\infty} f'_b(x, b) dx = \int_0^{+\infty} -e^{-ax} \cos bx dx = \left(\frac{-a}{a^2+b^2} e^{-ax} \cos bx + \frac{b}{a^2+b^2} e^{-ax} \sin bx \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

hội tụ đều theo b trên mỗi $[0, +\infty)$ theo tiêu chuẩn Weierstrass, thật vậy, $|e^{-ax} \cos bx| \leq e^{-ax^2}$, mà $\int_0^{+\infty} -e^{-ax^2} dx$ hội tụ.

Do đó

$$I'(b) = \int_0^{+\infty} f'_b(x, b) dx = \frac{a}{a^2+b^2} \Rightarrow I(b) = \int I'(b) db = \int \frac{a}{a^2+b^2} db = \arctan \frac{b}{a} + C$$

Mặt khác $I(c) = 0$ nên $C = -\arctan \frac{c}{a}$ và do đó $I = \arctan \frac{b}{a} - \arctan \frac{c}{a}$.

Ví dụ 8. Tính tích phân $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(yx) dx$.

Lời giải. Đặt $I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(yx) dx$, $f(x, y) = e^{-x^2} \cos(yx)$. Ta có:

- $f(x, y) = e^{-x^2} \cos(yx)$ liên tục trên $[0, +\infty) \times (0, +\infty)$.
- $f'_y(x, y) = -xe^{-x^2} \sin(yx)$ liên tục trên $[0, +\infty) \times (0, +\infty)$.
- $\int_0^{+\infty} f'_y(x, y) dx = \int_0^{+\infty} -xe^{-x^2} \sin(yx) dx = \frac{1}{2} e^{-x^2} \sin(yx) \Big|_0^{+\infty} -$

$\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} ye^{-x^2} \sin(yx) dx = \frac{-y}{2} I(y)$ hội tụ đều theo tiêu chuẩn Weierstrass, thật vậy, $|f'_y(x, y)| \leq xe^{-x^2}$, mà $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$ hội tụ.

Do đó $\frac{I'(y)}{I(y)} = \frac{-y}{2} \Rightarrow I(y) = Ce^{-y^2/4}$; Mặt khác $I(0) = 0$ nên $C = \frac{\sqrt{y}}{2}$,

Vậy $I = \frac{\sqrt{y}}{2} e^{-y^2/4}$.

Nhận xét:

(1) Việc kiểm tra các điều kiện để đạo hàm qua dấu tích phân hay điều kiện đổi thứ tự lấy tích phân đôi khi không dễ dàng chút nào.

(2) Các tích phân $\int_0^{+\infty} f'_a(x, y) dx$ ở câu b, c, d chỉ hội tụ đều trên khoảng $[\varepsilon, +\infty)$ với mỗi $\varepsilon > 0$, mà không hội tụ đều trên $(0, +\infty)$. Tuy nhiên điều đó cũng đủ để khẳng định rằng $I'_a = \int_0^{+\infty} f'_a(x, y) dx$ trên $(0, +\infty)$.

3.3. Tích phân EULER

3.3.1 Hàm Gamma

a) Định nghĩa: $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ xác định trên $(0, +\infty)$.

b) Tính chất:

$$(1) \text{ Hạ bậc: } \Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \quad \Gamma(\alpha-n) = \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)}.$$

Ý nghĩa của công thức trên là để nghiên cứu $\Gamma(p)$ ta chỉ cần nghiên cứu $\Gamma(p)$ với $0 < p \leq 1$ mà thôi, còn với $p > 1$ chúng ta sẽ sử dụng công thức hạ bậc.

(2) Đặc biệt, $\Gamma(1) = 1$ nên $\Gamma(n) = (n-1)!, \forall n \in \mathbf{N}$.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \text{ nên } \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

(3) Đạo hàm của hàm Gamma: $\Gamma^{(k)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} (\ln^k x) \cdot e^{-x} dx$.

$$(4) \Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \forall 0 < p < 1.$$

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^{+\infty} x^{10} e^{-x^2} dx;$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\frac{-7}{x^2}}}{x^2} dx;$

c) $\int_{-\infty}^0 x^{22} e^{\sqrt[3]{x}} dx.$

3.3.2 Hàm Beta

a) Định nghĩa.

Dạng 1: $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx;$

Dạng 2: $B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx;$

Dạng lượng giác:

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} t \cos^{2q-1} t dt;$$

$$B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t \cos^n t dt$$

b) Tính chất:

(1) Tính đối xứng: $B(p, q) = B(q, p).$

(2) Hạ bậc:

$$\begin{cases} B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q) \text{ nếu } p > 1 \\ B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1) \text{ nếu } q > 1 \end{cases}$$

Ý nghĩa của công thức trên ở chỗ muốn nghiên cứu hàm beta ta chỉ cần nghiên cứu nó trong khoảng $(0, 1] \times (0, 1]$ mà thôi.

(3) Đặc biệt, $B(1, 1) = 1$ nên

$$\begin{cases} B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}, \forall m, n \in \mathbf{N} \\ B(p, n) = \frac{(n-1)!}{(p+n-1)(p+n-2)\dots(p+1)p}, \forall n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

(4) Công thức liên hệ giữa hàm Beta và Gamma: $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$

(5) $B(p, 1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$

Ví dụ 2. Tính các tích phân

- a) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)^2} dx;$
- b) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)^3} dx;$
- c) $\int_0^1 x^7 \sqrt[3]{1-x^3} dx$ (20232);
- d) $\int_0^{+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{(1+x^3)^2} dx$ (20232).

Ví dụ 3. Tính các tích phân

- a) $\int_0^{+\infty} \frac{2^{-x}-e^{-x}}{x} dx$ (20232);
- b) $\int_0^2 x^4 \sqrt{4-x^2} dx$ (20243).

Ví dụ 4. Biểu thị $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx$ qua $B(m, n)$

Lời giải. Đặt $\sin x = \sqrt{t} \Rightarrow 0 \leq t \leq 1, \cos x dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x (1 - \sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cos x dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{m}{2}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}} t^{\frac{-1}{2}} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right). \end{aligned}$$

Đây chính là công thức ở dạng lượng giác của hàm Beta.

Ví dụ 5. Tính các tích phân sau:

- a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx;$
- b) $I = \int_0^a x^{2n} \sqrt{a^2 - x^2} dx, (a > 0);$
- c) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2} dx;$
- d) $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx.$

Ví dụ 6. Tính các tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{1+x^n} dx, \quad 2 < n \in \mathbb{N}$

Lời giải. Đặt $x^n = t \Rightarrow dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt;$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{n}+1} \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{2}{n}} dt}{(1+t)^2} = \\ &= \frac{1}{n} B\left(\frac{2}{n} + 1, 1 - \frac{2}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{2}{n} \left(1 + 1 - \frac{2}{n}\right)}{\left(\frac{2}{n} + 1\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) - 1} B\left(\frac{2}{n}, 1 - \frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n^2} \frac{\pi}{\sin(2\pi/n)}. \end{aligned}$$

Bài tập

1. (20222) Tính các tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^7} dx$.
2. (20222) Tính các tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+4x^2)^3} dx$.
3. (20212) Tính các tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{x^5}{1+x^{2022}} dx$.
4. (20222) Tìm giới hạn $\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^{\pi/2} \sin^6(x-y) \cos^3(x+y) dx$.
5. (20201) Tính các tích phân $\int_0^{+\infty} x^5 e^{-x^4} dx$.
6. (20192) Tính các tích phân $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x/4}}{(1+e^x)^2} dx$.
7. (20192) Tính các tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^{3/2}}{x^4} dx$.
8. (20183) Tính các tích phân $\int_0^{+\infty} x^{30} e^{-x^2} dx$.
9. (20183) Tính các tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{2^{-x}-3^{-x}}{x} dx$.
10. (20182) Tính các tích phân $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^4)^4} dx$.
11. (20182) Tính các tích phân $\int_0^{+\infty} x^6 3^{-x^2} dx$.
12. (20173) Tính các tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^7 x \cos^5 x} dx$.
13. (20172) Tính các tích phân $\int_0^1 x^6 \sqrt{1-x^2} dx$.
14. (20172) Tính các tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(1+x^3)^2} dx$.
15. (20163) Tính các tích phân $\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{10} dx$.
16. 20162) Tìm giới hạn $\lim_{y \rightarrow 1} \int_0^y \frac{\ar}{x^2+y^2} dx$.
17. (20173) Chứng minh rằng hàm số $I(y) = \int_0^1 \frac{3^x y}{x^2+y^2} dx$ không liên tục tại $y = 0$.

Chương 4

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

4.1. Tích phân đường loại một (Tích phân đường của trường vô hướng)

4.1.1. Định nghĩa

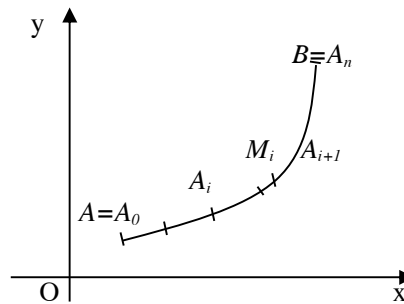
Cho hàm số $f(x, y) = f(M)$ xác định trên cung $\widehat{AB}$. Chia cung $\widehat{AB}$ thành n phần bởi các điểm chia

$$A = A_0, A_1, \dots, A_n = B \text{ (Hình 3.1).}$$

Trên mỗi cung $\widehat{A_i A_{i+1}}$, lấy một điểm $M_i(\xi_i, \eta_i)$ tùy ý và lập tổng

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) \Delta s_i$$

trong đó Δs_i là độ dài cung $\widehat{A_i A_{i+1}}$.



Hình 4.1

Nếu khi $n \rightarrow \infty$ sao cho $\max \Delta s_i \rightarrow 0$ mà I_n dần tới một giới hạn hữu hạn I không phụ thuộc vào cách chia cung $\widehat{AB}$ và cách lấy điểm M_i trong mỗi cung nhỏ $\widehat{A_i A_{i+1}}$ thì giới hạn đó được gọi là tích phân đường loại một của hàm $f(x, y)$ dọc cung $\widehat{AB}$ và ký hiệu $\int_{\widehat{AB}} f(x, y) ds$ trong đó ds là vi phân cung $\widehat{AB}$. Như vậy

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y) ds = \lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) \Delta s_i \quad (1)$$

Nếu tích phân (1) tồn tại, thì ta nói hàm $f(x, y)$ khả tích trên cung $\widehat{AB}$.

Người ta chứng minh được rằng nếu hàm $f(x, y)$ liên tục dọc theo cung trơn $\widehat{AB}$ (cung trơn là cung có tiếp tuyến biến thiên liên tục) thì tồn tại tích phân $\int_{\widehat{AB}} f(x, y) ds$.

Chú ý:

- +Tích phân đường loại một không phụ thuộc chiều lấy tích phân trên cung $\widehat{AB}$.
- +Tích phân đường loại một có các tính chất tương tự tích phân xác định.

4.1.2. Cách tính

Cho hàm số $f(x, y)$ liên tục trên cung $\widehat{AB}$ trơn.

1) Trường hợp cung $\widehat{AB}$ có phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), t_A \leq t \leq t_B$.

Tích phân (1) được tính theo công thức

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y) ds = \int_{t_A}^{t_B} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \quad (2)$$

2) Trường hợp cung $\widehat{AB}$ có phương trình $y = y(x), a \leq x \leq b$.

Tích phân (1) được tính theo công thức

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx. \quad (3)$$

Ví dụ 1.

- Tính tích phân đường $\int_C (x + y) ds$, trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = 2y$.
- (20233) Tính tích phân $\int_C (2x + y) ds$, C là đường cong $y = \sqrt{2x - x^2}$.
- (20221) Tính tích phân $\int_C x^2 ds$, C là đường cong $x = e^t, y = t + 1, 0 \leq t \leq 1$.
- (20242) Tính $\int_C xy ds$, C là đường $9x^2 + 4y^2 = 36$ trong góc phần tư thứ nhất.

Chú ý:

(1) Nếu $\widehat{AB}$ là cung trơn trong không gian có phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t_A \leq t \leq t_B$, thì tích phân đường loại một được tính theo công thức

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y, z) ds = \int_{t_A}^{t_B} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

Ví dụ 2.(B4) Tính tích phân $\int_C (xz + yz^2) ds$, C là đường cong $x = 2t^3, y = t, z = \sqrt{3}t^2, 0 \leq t \leq 1$.

(2) Nếu $\widehat{AB}$ là cung không trơn, giả sử tại điểm C trên cung $\widehat{AB}$ không có tiếp tuyến thì ta tính

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y, z) ds = \int_{\widehat{AC}} f(x, y, z) ds + \int_{\widehat{CB}} f(x, y, z) ds.$$

Tích phân đường loại một có ứng dụng trong việc tính khối lượng cung, mômen tĩnh, trọng tâm của cung trong mặt phẳng và trong không gian, mômen quán tính, diện tích của mặt trụ, ... (Các vấn đề này bạn đọc tìm hiểu trong tài liệu chuyên ngành).

Bài tập

- (20201) Tính tích phân đường $\int_C (1 + x^2) ds$, trong đó C là đường astroid $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ trong góc phần tư thứ nhất, nối hai điểm $A(1, 0), B(0, 1)$.
- (20162) Tính tích phân đường $\int_C (xy + x - y) ds$, trong đó C là đường cong $x = \cos t, y = \sin t$ với $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
- (20172) Tính $\int_C (x + 2y) ds$, trong đó C là nửa đường tròn $y = \sqrt{4 - x^2}$.

4.2. Tích phân đường loại hai (Tích phân đường của trường vectơ)

4.2.1. Trường véc tơ và đường dòng

Ta nói rằng trong $\Omega \subseteq R^3$ **có trường vectơ** $\vec{F}$ nếu tại mỗi điểm $M \in \Omega$ đều có vectơ $\vec{F}(M)$ xác định. Như vậy cho **trường vectơ** trong miền Ω là cho hàm vectơ $\vec{F}(M)$ xác định trong miền Ω đó: $\vec{F} = \vec{F}(M) = \vec{F}(x, y, z), M(x, y, z) \in \Omega$, trong đó $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$.

Ví dụ 1: Dòng nước chảy, tại mỗi điểm của nó đều có một vectơ vận tốc xác định. Khi đó tất cả các vectơ vận tốc tạo thành trường vectơ thì gọi là *trường vận tốc* của dòng nước.

Chú ý. Ở đây ta chỉ xét trường vectơ mà hàm vectơ không phụ thuộc vào thời gian t gọi là **trường vectơ dòng**.

Cho trường vectơ $\vec{F} = \vec{F}(M)$ trong miền Ω . Một đường cong $(C) \subset \Omega$ mà tại mọi điểm của nó, tiếp tuyến với đường cong (C) đều đồng phương với vectơ của trường đi qua tiếp điểm gọi là **đường dòng**. Từ đó ta thấy rằng qua mỗi điểm của trường véc tơ chỉ có một và chỉ một đường dòng đi qua. Các đường dòng không cắt nhau.

Ví dụ 2: Các đường sức trong từ trường hoặc điện trường là các đường dòng.

Cho trường vectơ

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$$

và đường dòng C có phương trình tham số là $x = x(t); y = y(t); z = z(t)$. Khi đó, tiếp tuyến tại mỗi điểm $M(x, y, z)$ của C có vectơ chỉ phương là $(x'(t), y'(t), z'(t))$. Do tiếp tuyến này đồng phương với $\vec{F}(M)$ nên

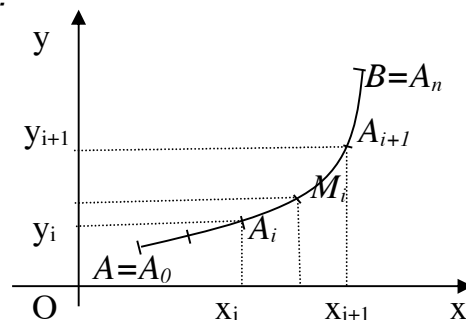
$$x'(t) = P, y'(t) = Q, z'(t) = R \Leftrightarrow dx = P, dy = Q, dz = R$$

(gọi là hệ phương trình vi phân của họ đường dòng của trường vectơ $\vec{F}(M)$).

Nhận xét: Qua mỗi điểm của trường vectơ có duy nhất một đường dòng. Các đường dòng không cắt nhau.

4.2.2. Định nghĩa tích phân đường loại hai

Cho các hàm số $P(x, y), Q(x, y)$ xác định trên cung định hướng $\widehat{AB}$ thuộc mặt phẳng Oxy , A là điểm đầu, B là điểm cuối. Chia cung $\widehat{AB}$ thành n phần bởi các điểm chia $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$ (Hình 4.2).



Hình 4.2

Trên mỗi cung $\widehat{A_i A_{i+1}}$, lấy một điểm $M_i(\xi_i, \eta_i)$ tùy ý và lập tổng

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} P(M_i) \Delta x_i + Q(M_i) \Delta y_i = \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i, y_i) \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \Delta y_i$$

trong đó $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \Delta y_i = y_{i+1} - y_i, i = \overline{0, n-1}$.

Nếu khi $n \rightarrow \infty$ sao cho $\max \Delta x_i \rightarrow 0, \max \Delta y_i \rightarrow 0$ mà I_n dần tới một giới hạn hữu hạn I không phụ thuộc vào cách chia cung $\widehat{AB}$ và cách lấy điểm M_i trong mỗi cung nhỏ $\widehat{A_i A_{i+1}}$, thì giới hạn đó được gọi là tích phân đường loại hai của hai hàm $P(x, y), Q(x, y)$ dọc cung $\widehat{AB}$.

Ký hiệu $\int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$. Vậy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (4)$$

Người ta chứng minh được rằng nếu các hàm $P(x, y), Q(x, y)$ xác định và liên tục trên cung $\widehat{AB}$ trơn thì tồn tại tích phân $\int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$.

Ý nghĩa vật lý: Một chất điểm M di chuyển theo một cung phẳng L từ A đến B dưới tác dụng của một lực $\vec{F} = \vec{F}(M) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ Biến thiên liên tục dọc theo cung $\widehat{AB}$. Hãy tính công W của lực ấy. Ta có

$$W = \int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

4.2.3. Tính chất

(1) Nếu đổi chiều lấy tích phân thì tích phân đường loại hai đổi dấu

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = - \int_{\widehat{BA}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

(2) $\int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\widehat{AC}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy + \int_{\widehat{CB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$

trong đó C là một điểm nào đó trên cung $\widehat{AB}$.

Trong các tính chất trên ta giả thiết các tích phân đều tồn tại.

Chú ý : Nếu $\widehat{AB}$ là đường cong kín không tự cắt ($A \equiv B$) giới hạn miền D giới nội, thì tích phân đường (4) được ký hiệu

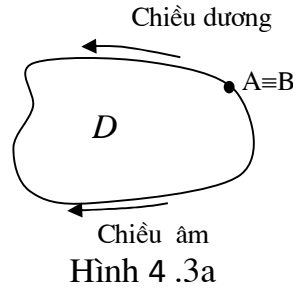
$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

trong đó L là biên của miền D (Hình 4.3a) và chiều đi trên L là chiều dương (L^+), nếu ngược với chiều quay kim đồng hồ, chiều âm (L^-) là chiều quay kim đồng hồ.

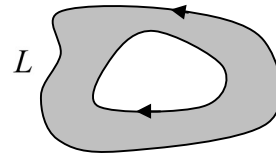
Theo tính chất 1) ta có

$$\oint_{L^-} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = - \oint_{L^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

Nếu miền D có biên gồm hai đường cong kín không cắt nhau (Hình 4.3b) thì quy ước chiều dương trên L là chiều mà khi đi dọc theo L thì miền bị giới hạn bởi L nằm về phía tay trái. Chiều ngược lại là chiều âm.



Hình 4.3a



Hình 4.3b

4.2.4. Cách tính

Giả sử cho các hàm $P(x, y), Q(x, y)$ liên tục trên cung $\widehat{AB}$ trơn.

(1) Trường hợp cung $\widehat{AB}$ có phương trình tham số $x = x(t), y = y(t)$, với mọi t đi từ t_A đến t_B (ta viết $t: t_A \rightarrow t_B$) thì tích phân (4) được tính theo công thức

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{t_A}^{t_B} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt \quad (5)$$

(2) Trường hợp cung $\widehat{AB}$ có phương trình $y = f(x)$ với mọi x đi từ x_A đến x_B (ta viết $x: x_A \rightarrow x_B$) thì tích phân (4) được tính theo công thức

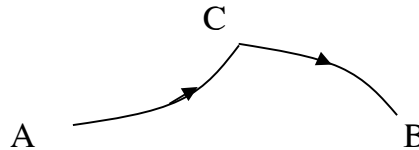
$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{x_A}^{x_B} [P(x, f(x)) + Q(x, f(x))f'(x)] dx \quad (6)$$

(3) Trường hợp cung AB có phương trình $x = g(y)$ với mọi y đi từ y_A đến y_B (ta viết $y: y_A \rightarrow y_B$) thì tích phân (4) được tính theo công thức

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{y_A}^{y_B} [P(g(y), y)g'(y) + Q(g(y), y)] dy \quad (7)$$

Chú ý: Nếu $\widehat{AB}$ là cung không trơn (Hình 4.4) giả sử tại điểm $C \in \widehat{AB}$ mà tại đó phương trình đường cong không tồn tại đạo hàm thì ta có

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\widehat{AC}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{\widehat{CB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$



Hình 4.4

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \int_C (2a - y)dx + xdy$ ($a > 0$), trong đó C là cung đầu của xycloit $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ với t đi từ 0 đến 2π .

Ví dụ 2. Tính tích phân $I = \int_C (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, trong đó C là đường parabol $y = x^2, -1 \leq x \leq 1$ với điểm đầu là $A(-1, 1)$, điểm cuối $B(1, 1)$.

Ví dụ 3. Tính tích phân $I = \int_C xydx + x^2dy$, trong đó C là đường parabol $x = 2\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}}, -1 \leq x \leq 1$ với điểm đầu là $A(0, -3)$, điểm cuối $B(0, 3)$.

Ví dụ 4. Tính tích phân $I = \oint_L xydx + (x + y)dy$, trong đó L là chu tuyến của miền D giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = 0, x = 1$, chiều dương.

Chú ý: Nếu $\widehat{AB}$ là đường cong trơn trong không gian, có phương trình tham số là $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$

khả vi với mọi t đi từ t_A đến t_B thì tích phân đường loại hai được tính theo công thức

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz &= \\ &= \int_{t_A}^{t_B} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) \\ &\quad + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt. \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Tính $I = \int_C xdx - (y + z)dy + 2zdz$, trong đó C là đoạn thẳng đi từ điểm $A(0,0,0)$, điểm điểm $B(1,1,1)$.

4.2.5. Công thức Green

Định lý Green: Cho D là miền đóng, giới nội trong mặt phẳng Oxy với biên L kín, trơn từng khúc. Các hàm số $P(x, y), Q(x, y)$ và các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong miền chứa D thì ta có

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \quad (8)$$

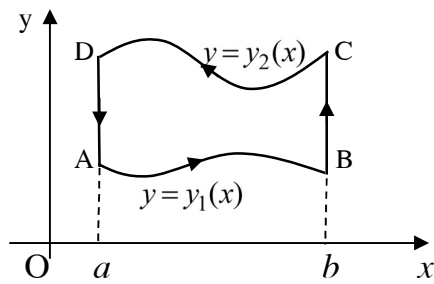
trong đó chiều lấy tích phân là chiều dương. (Công thức (8) được gọi là công thức Green.)

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh

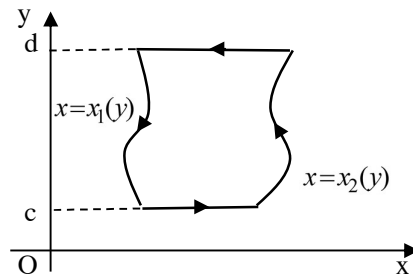
$$\oint_L Pdx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy, \oint_L Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$$

từ đó suy ra công thức Green.

1) Trước hết ta xét miền D như sau $a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ (Hình 4.5a). (mọi đường thẳng $x = c, a < c < b$ cắt biên tại hai điểm có tung độ là $y_1(c), y_2(c)$).



Hình 4.5a



Hình 4.5b

Ta có

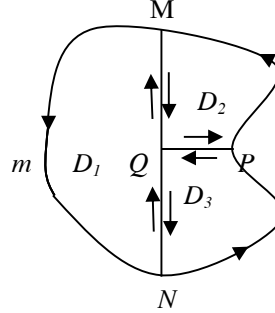
$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \\ &= \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] dx = - \int_b^a P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx = \\ &= - \int_{\widehat{CD}} P(x, y) dx - \int_{\widehat{AD}} P(x, y) dx - \int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx - \int_{\widehat{BC}} P(x, y) dx = \oint_L P(x, y) dx. \end{aligned}$$

(trong đó $\int_{DA} P(x, y)dx = 0$, $\int_{BC} P(x, y)dx = 0$ vì $x = a, x = b \Rightarrow dx = 0$).

+ Tương tự với miền D được xác định $c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$ (Hình 4.5b).

2) Trường hợp D là miền đơn liên (Hình 4.6), ta có thể chia D thành hữu hạn những miền nhỏ như trong phần 1). Giả sử miền D được chia làm 3 miền D_1, D_2, D_3 với các biên tương ứng là L_1, L_2, L_3 , trong đó

$$L_1 = \widehat{MmN} + NM; L_2 = \widehat{PM} + MQ + QP; L_3 = PQ + QN + \widehat{NP}$$



Hình 4.6

Ta có

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy &= \\ &= \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \iint_{D_3} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \end{aligned}$$

Theo công thức Green đối với các miền D_1, D_2, D_3 ta được

$$\iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{\widehat{MmN}} Pdx + Qdy + \int_{NM} Pdx + Qdy \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy &= \oint_{L_2} Pdx + Qdy = \int_{\widehat{PM}} Pdx + Qdy + \int_{MQ} Pdx + Qdy + \\ &+ \int_{QP} Pdx + Qdy, \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{D_3} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy &= \oint_{L_3} Pdx + Qdy = \int_{PQ} Pdx + Qdy + \int_{QN} Pdx + Qdy + \\ &+ \int_{\widehat{NP}} Pdx + Qdy, \quad (11) \end{aligned}$$

Cộng (9), (10) và (11) ta được

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy &= \\ &= \int_{\widehat{MmN}} Pdx + Qdy + \int_{\widehat{NP}} Pdx + Qdy + \int_{\widehat{PM}} Pdx + Qdy = \oint_L Pdx + Qdy, \end{aligned}$$

vì tổng các tích phân đường của $Pdx + Qdy$ trên cùng một cung hai lần theo hai chiều ngược nhau bằng 0..

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \oint_L xydx + (x + y)dy$, trong đó L là chu tuyến dương của miền D giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = 0, x = 1$.

Ví dụ 2. Tính tích phân $I = \oint_L xy^2 dy - x^2 y dx$, trong đó L là chu tuyến dương của miền D giới hạn bởi các đường $x^2 + y^2 = 2x, y = x, y = 0, (y \geq 0)$.

Ví dụ 3. Cho C là biên của miền bị chặn D bởi các đường $x - y - 2, x = y^2$, định hướng dương. Tính $I = \oint_C (e^{x^2} + y) dx + xy dy$.

Ví dụ 4. (20232) Tính tích phân $I = \int_C y dx - x dy$, trong đó C là biên của miền xác định bởi $1 \leq xy \leq 4; x \leq y \leq 4x$, có hướng ngược chiều quay của kim đồng hồ.

Ví dụ 5. (20221) Tính tích phân $I = \oint_L (e^{x^3} + x^2 y) dx + (x^3 y + 2xy^2) dy$, trong đó L là đường $x^2 + y^2 = 2x$, hướng dương.

Ví dụ 6. (2022) Tính tích phân $I = \int_C (x + y) dx + (x^2 - 3y + \sin(y^2)) dy$, trong đó C là cung tròn $y = \sqrt{2x - x^2}$ đi từ điểm $A(2;0)$ đến điểm $B(0;0)$.

Ví dụ 7. (20232) Cho C là nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 2x, x \geq 1$ đi từ điểm $A(1; -1)$ đến điểm $B(1;1)$. Tính $I = \int_C (xe^{\sin x} - y^2) dx + (y \ln(y^2 + 1) + x^2 + x) dy$.

Ví dụ 8. (20242) Tính tích phân $I = \oint_L (x + 2y) dx + (3x^2 - 4y) dy$, trong đó C là đường elip $9x^2 + 4y^2 = 36$, có hướng ngược chiều quay của kim đồng hồ.

Ví dụ 9. Tính tích phân $I = \int_C (ye^{xy} + 2x \cos y - x^2 y) dx + (xe^{xy} - x^2 \sin y + xy^2 + xy) dy$, trong đó C là cung tròn $y = \sqrt{2x - x^2}$ đi từ điểm $A(2;0)$ đến điểm $O(0;0)$.

Ví dụ 10. Tính tích phân $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, trong đó L là đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$), hướng dương.

4.2.6. Điều kiện để tích phân đường loại hai không phụ thuộc vào đường lấy tích phân

Nói chung tích phân đường loại hai $\int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ không những phụ thuộc điểm đầu A và điểm cuối B mà còn phụ thuộc vào đường lấy tích phân $\widehat{AB}$.

Trong phần này ta sẽ xét với điều kiện nào thì tích phân đường loại hai chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối mà không phụ thuộc vào đường lấy tích phân.

Định lý 1. (Định lý bốn mệnh đề tương đương)

Cho các hàm số $P(x, y), Q(x, y)$ và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong miền đơn liên D . Bốn mệnh đề sau là tương đương:

$$1) \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \forall (x, y) \in D.$$

$$2) \oint_L P dx + Q dy = 0 \text{ với mọi chu tuyến } L \text{ nằm trong } D.$$

3) $\int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy$ trong đó $\widehat{AB}$ là một cung nằm trong D , chỉ phụ thuộc vào điểm đầu A và điểm cuối B mà không phụ thuộc vào đường đi từ A đến B .

4) Biểu thức $P dx + Q dy$ là vi phân toàn phần của một hàm $u(x, y)$ nào đó trong miền D (nghĩa là $P dx + Q dy = du$).

Chú ý: Nếu $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $M_0(x_0, y_0)$ là điểm thuộc D , điểm chạy $M(x, y)$ thuộc D , thì $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x, y)$ và $u(x, y)$ được xác định bởi công thức

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy + C, \quad (12)$$

hoặc
$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + C, \quad (13)$$

C là hằng số bất kỳ.

Thật vậy, vì tích phân $\int_{M_0M} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường lấy tích phân nên nếu ta chọn đường $\overline{M_0M}$ là đường gấp khúc M_0KM , ta có công thức (12), nếu ta chọn đường M_0M là đường gấp khúc M_0NM (Hình 3.13) ta có công thức (13).

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \int_L (1 + y) \cos x dx + \sin x dy$.

a) Chứng minh biểu thức dưới dấu tích phân là vi phân toàn phần của một hàm $u(x, y)$ nào đó.

b) Tính I nếu L là nửa trên đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ đi từ $A(2; 0)$ đến $O(0; 0)$.

Ví dụ 2. Chứng minh biểu thức $(y + \ln(x + 1))dx + (x + 1 - e^y)dy$ là vi phân toàn phần của một hàm $u(x, y)$ nào đó. Tìm hàm số đó.

Ví dụ 3. (20232) Biểu thức $(ae^y + 2xy^3)dx + (xe^y + bx^2y^2 + 1)dy$, với $a, b \in \mathbb{R}$, là vi phân toàn phần của một hàm $u(x, y)$. Tìm a, b và hàm số $u(x, y)$ đó.

Chú ý: Nếu tích phân $\int_{AB} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường lấy tích phân từ $A(x_0, y_0)$ đến $B(x_1, y_1)$, (tức là $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$), thì có thể viết nó dưới dạng

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_A^B Pdx + Qdy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} Pdx + Qdy$$

Để tính tích phân trên ta thường chọn đường lấy tích phân là các đường gấp khúc nối A với B có các cạnh song song với các trục tọa độ Ox, Oy , trong đó các hàm số $P(x, y), Q(x, y)$ cùng các đạo hàm riêng của nó liên tục trên các đoạn đó.

Ví dụ 4. (20222) Tính tích phân

$$I = \int_{(1;1)}^{(3;8)} 3y^{4/3}dx + 4xy^{1/3}dy.$$

Ví dụ 5. Tính tích phân

$$I = \int_{(1;2)}^{(3;-1)} (y^2e^x + 6xy)dx + (3x^2 + 2ye^x)dy.$$

Hệ quả của Định lý Green. Giả sử L là đường cong kín bao miền D , hướng dương. thì diện tích của miền D là $S_D = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx$. (Thật vậy, trong công thức Green $\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$, lấy $P = -y, Q = x$)

Ví dụ 6. Tính diện tích của miền phẳng D giới hạn bởi elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ví dụ 7. Tính tích phân đường $\int_L \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}} dx - \frac{x^2+\sqrt{x^2+y^2}}{y^2\sqrt{x^2+y^2}} dy$, trong đó L là đường cong $y = \frac{x^3}{4} + 1$ đi từ điểm đầu $A(0; 1)$ đến điểm cuối $B(2; 3)$.

Chú ý: Đối với Ví dụ 7, nếu ta tính trực tiếp bằng cách thay $y = \frac{x^3}{4} + 1$ vào biểu thức dưới dấu tích phân sẽ dẫn đến một tích phân xác định mà việc tìm nguyên hàm của nó là rất khó.

Bài tập

- (2023CK) Cho C là nửa đường cong $x^2 + y^2 = 2x$, $x \geq 1$ đi từ điểm $A(1; -1)$ đến điểm $B(1; 1)$. Tính tích phân $I = \int_C (xe^{\sin x} - y^2) dx + (y \ln(y^2 + 1) + x^2 + x) dy$, ĐS: $I = I_1 - I_2 = \frac{16}{3} + \frac{3\pi}{2}$.
- (2023) Tính tích phân đường $\int_L (x^2 y^3 + x) dx + (x^3 y^2 - 6y\sqrt{y^2 + 1}) dy$, trong đó L là đường cong $y = \sqrt[4]{1 - x^3}$ đi từ $A(1; 0)$ đến $B(0; 1)$. ĐS: $I = \frac{3}{2} - 4\sqrt{2}$
- (20201) Tính tích phân $\int_L 2(x^3 + y^5) dx + 5x(y^4 - 1) dy$, trong đó L là đường gấp khúc ABCA nối các điểm $A(2; 0), A(1; 1), A(0; 2)$.
- (20201) Tính tích phân $\int_C (e^x \sin y + y^2) dx + (x^2 + 2xy + e^x \cos y) dy$, trong đó C là nửa đường tròn $x = \sqrt{2y - y^2}$, đi từ điểm $O(0; 0)$ đến điểm $A(0; 2)$.
- (20192) Tính tích phân $\oint_C (e^x + y^2) dx + (x^2 e^y) dy$, trong đó C là biên của miền giới hạn bởi các đường $y = 1 - x^2$ và $y = 0$. Có chiều dương.
- (20192) Tính tích phân $\int_C (2xe^x + y^2) dx + (x^4 + e^y) dy$, trong đó C là nửa đường cong $y = \sqrt[4]{1 - x^2}$ đi từ điểm $A(-1; 0)$ đến điểm $B(1; 0)$.
- (20183) Tính tích phân $\int_L \frac{(10x^4 - y) dx - (7x^8 - 8y^7) dy}{\sqrt{4x^2 + y^2}}$, trong đó L là đường cong $y = 2\sqrt{1 - x^2}$ đi từ điểm $A(1; 0)$ đến điểm $B(-1; 0)$.
- (20182) Tính $\oint_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, định hướng dương.
- (20182) Tính tích phân $\oint_C (z^2 + y^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz$, trong đó C là giao của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt nón $x = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$ theo hướng cùng chiều kim đồng hồ khi nhìn từ gốc O .
- (20182) Tính $\oint_{C_\alpha} \frac{(x-y) dx - (x+y) dy}{x^2 + y^2}$, C_α là đường tròn $x^2 + \alpha y^2 = 1$, hướng dương.
- (20173) Tính tích phân $\int_L y(3x - 2) dx + (x + 2y) dy$, trong đó L là đoạn thẳng AB đi từ điểm $A(1; 0)$ đến điểm $B(0; 1)$.
- (2017) Chứng minh rằng nếu $f(u)$ là một hàm số cùng với đạo hàm của nó liên tục trên R và L là đường đi từ $O(0; 0)$ đến $A(a; b)$ thì $\int_L f(x + y)(dx + dy) = \int_0^{a+b} f(u) du$.

Chương 5

TÍCH PHÂN MẶT

5.1 Tích phân mặt loại một (Tích phân mặt của trường vô hướng)

5.1.1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(M) = f(x, y, z)$ xác định trên mặt cong S . Chia S thành n mặt cong nhỏ không dẫn lên nhau. Gọi tên và diện tích của các mặt tương ứng là $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. Trong mỗi mặt nhỏ ΔS_i lấy một điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$ tùy ý. Lập tổng tích phân

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i.$$

Nếu khi $n \rightarrow \infty$ sao cho $\max d(\Delta S_i) \rightarrow 0$ ($d(\Delta S_i)$ là đường kính của mảnh ΔS_i) mà I_n dần tới một giới hạn hữu hạn I không phụ thuộc vào cách chia mặt S và cách lấy điểm M_i trong mỗi mặt nhỏ ΔS_i , thì giới hạn đó được gọi là **tích phân mặt loại một** của hàm số $f(x, y, z)$ trên mặt S và ký hiệu $\iint_S f(x, y, z) dS$.

$$\text{Như vậy } \iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{\max d(\Delta S_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i \quad (14)$$

Mặt S trong không gian $Oxyz$ được xem như là tập các điểm $M(x, y, z)$ thỏa mãn phương trình

$$F(x, y, z) = 0. \quad (15)$$

Mặt S được gọi là trơn nếu hàm số $F(x, y, z)$ có các đạo hàm riêng F'_x, F'_y, F'_z liên tục và không đồng thời bằng không trên S .

+ Người ta chứng minh được rằng nếu hàm $f(x, y, z)$ liên tục trên mặt cong trơn S thì tích phân mặt loại một $\iint_S f(x, y, z) dS$ tồn tại.

+ Tích phân mặt loại một có các tính chất tương tự tích phân kép.

+ Tích phân mặt $\iint_S dS$ là diện tích của mặt S .

+ Nếu $\rho(x, y, z)$ là khối lượng riêng (hàm mật độ) tại điểm $M(x, y, z) \in S$ liên tục trên mặt S thì khối lượng của mặt cong S là $m = \iint_S \rho(x, y, z) dS$.

5.1.2. Cách tính

Giả sử mặt S được cho bởi phương trình $z = z(x, y)$, hàm $z(x, y)$ liên tục và có các đạo hàm riêng $z'_x(x, y), z'_y(x, y)$ liên tục trong miền mở chứa hình chiếu D của mặt cong S lên mặt phẳng Oxy. Cho hàm $f(x, y, z)$ liên tục trên mặt S thì khi đó tích phân mặt loại một được tính theo công thức

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} dx dy.$$

Ví dụ 1.

a) Tính tích phân $I = \iint_S (x^2 + y^2) dS$, trong đó S là phần mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$ nằm giữa các mặt phẳng $z = 0, z = 1$.

b) (20232) Tính $I = \iint_S (z + 2) dS$ với S là phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}, 1 \leq z \leq 3$.

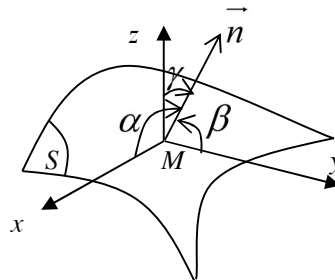
c) (20222) Tính $I = \iint_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dS$ với S là mặt xác định bởi $z = x^2 + y^2, z \leq 1$.

d) (20221) Tính $I = \iint_S \left(x + \frac{3y}{2} + \frac{z}{2} - 1\right)^2 dS$ với $S : 2x + 3y + z = 6, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

e) (2023) Tính $I = \iint_S (2x^2 - y^2 - 2z) dS$ với S là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

5.2. Tích phân mặt loại hai (Tích phân mặt của trường vecto)**5.2.1. Định nghĩa**

Mặt S được gọi là **mặt định hướng** hay là **mặt hai phía** nếu khi đi theo một chu tuyến đóng bất kỳ không có điểm chung với biên của nó, hướng của véc tơ pháp tuyến không thay đổi đi từ phía này sang phía kia của mặt. Chẳng hạn nếu S mặt kín có thể xác định véc tơ pháp tuyến hướng vào phía trong hoặc hướng ra phía ngoài.



Hình 5.1

Cho các hàm số $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ xác định trên mặt cong định hướng S và có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ tại điểm $M(x, y, z)$ của S hợp với các trục tọa độ một góc α, β, γ (Hình 5.1). Khi đó tích phân

$$I = \iint_S [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] dS$$

trong đó $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ là cosin chỉ hướng của vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ tại điểm $M(x, y, z)$, được gọi là **tích phân mặt loại hai** của các hàm $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ trên mặt S định hướng. Tích phân mặt loại hai trên còn được viết

$$I = \iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dxdz + R(x, y, z) dxdy.$$

+ Nếu đổi hướng của mặt S thì tích phân mặt loại hai đổi dấu.

+ Tích phân mặt loại hai có các tính chất tương tự tích phân kép.

5.2.2. Cách tính

Tích phân mặt loại hai được tính bằng cách đưa về tích phân kép. Giả sử cần tính $\iint_S R(x, y, z) dx dy$ trong đó S là mặt cong trơn được cho bởi phương trình $z = z(x, y)$.

+ Nếu véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ của S tại mọi điểm tạo với chiều dương trục Oz một góc nhọn thì ta có công thức

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy,$$

trong đó D_{xy} là hình chiếu vuông góc của mặt S lên mặt phẳng Oxy .

+ Nếu véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ của S tại mọi điểm tạo với chiều dương trục Oz một góc tù thì ta có công thức

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

Tương tự, ta có

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz,$$

$$\iint_S Q(x, y, z) dx dz = \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z) dx dz,$$

trong đó D_{yz}, D_{xz} là hình chiếu vuông góc của mặt S lên các mặt phẳng Oyz, Oxz tương ứng, chọn dấu $+$ hay $-$ tùy thuộc các góc α hay β là góc nhọn hay tù.

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \iint_S z dx dy$, trong đó S là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Chú ý: Nếu mặt S là một phần mặt trụ có đường sinh song song với trục tọa độ, chẳng hạn song song với Oz , thì $\iint_S R(x, y, z) dx dy = 0$, vì $\cos \gamma ds = \cos \frac{\pi}{2} ds = 0$.

Ví dụ 2. Tính tích phân $I = \iint_S x dy dz + y dx dz + z dx dy$, trong đó S là phía ngoài mặt trụ $x^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$ nằm trong đoạn $-h \leq z \leq h$ (không kể hai đáy).

6.2.3. Thông lượng, dive

Định nghĩa 1. Cho trường vectơ $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ có thành phần $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ hay $\vec{F} = P \vec{i} + Q \vec{j} + R \vec{k}$ và mặt cong S định hướng, pháp tuyến dương $\vec{n}$ tương ứng. Gọi $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ là cosin chỉ hướng của $\vec{n}$ thì tích phân mặt

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS,$$

là **thông lượng của trường vectơ $\vec{F}$ qua mặt cong S** và ký hiệu là Φ .

$$\text{Vậy} \quad \Phi = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS. \quad (1)$$

Nếu gọi F_n là hình chiếu của $\vec{F}$ lên $\vec{n}$ thì

$$F_n = ch_{\vec{n}} \vec{F} = \vec{F} \cdot \vec{n} = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma,$$

do đó thông lượng còn được tính

$$\Phi = \iint_S F_n dS. \quad (2)$$

Ví dụ 1: Giả sử $\vec{F}$ là trường vận tốc của dòng nước, lượng chất lỏng chảy qua mặt S trong một đơn vị thời gian là thông lượng của trường vận tốc của dòng nước chảy qua mặt S và được tính theo công thức (1) hoặc (2).

Cho trường vectơ $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ trong miền Ω , ta gọi đại lượng vô hướng

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

là **div của trường vectơ $\vec{F}$** tại điểm M . Ký hiệu $\text{div } \vec{F}(M)$. Vậy

$$\text{div } \vec{F}(M) = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M). \quad (3)$$

Ví dụ 2: Cho trường vectơ $\vec{F}(x, y, z) = xz\vec{i} + yz\vec{j} - xy\vec{k}$.

a) Tính div của trường vectơ $\vec{F}$ tại điểm $M(1; 1; 1)$.

b) Tính thông lượng qua phía ngoài của nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$.

Ví dụ 3.(2022) Tính thông lượng của trường vectơ

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + 2xz^2)\vec{i} + (yz + 2x^2y)\vec{j} + (2x^2z + y^3)\vec{k}$$

qua mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, hướng ra ngoài.

Ví dụ 4.(2014) Tính thông lượng trường vectơ $\vec{F}(x, y, z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ qua mặt kín (S) là biên của miền $V: 0 \leq z \leq \sqrt{1 - y^2}, 0 \leq x \leq 2$, hướng ra ngoài.

5.2.4. Định lý Ostrogratski

Định lý Ostrogratski: Cho Ω là miền kín giới nội trong $\mathbf{R}^3$ có biên là một mặt S trơn từng mảnh. Các hàm $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong miền chứa Ω , thì khi đó ta có công thức

$$I = \iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdx dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz, \quad (4)$$

trong đó tích phân mặt lấy theo phía ngoài của mặt S . (4) được gọi là công thức Ostrogratski.)

Chú ý. Từ công thức Ostrogratski, nếu $P = x, Q = y, R = z$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \iint_S xdydz + ydxdz + zdx dy \text{ là thể tích của miền } \Omega.$$

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \iint_S x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy$ trong đó S là phía trong mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, a > 0$

Ví dụ 2. (20242) Tính tích phân $I = \iint_S \frac{xdydz + ydxdz + z^3 dxdy}{x^2 + y^2 + z^2}$ trong đó S là mặt biên xác định theo hướng pháp tuyến ngoài của miền $\{(x, y, z) | 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Ví dụ 3. Tính tích phân $I = \iint_S xz dydz + x^2 y dxdz + y^2 z dxdy$, trong đó S là biên của vật thể xác định bởi $x^2 + y^2 - 2x \leq 0, 0 \leq z \leq x^2 + y^2$, có hướng ra ngoài.

Ví dụ 4. (20222) Tính $I = \iint_S y^2 dydz + z^2 dxdz + (x - y) dxdy$, trong đó S là phía trên của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 1$, khi nhìn từ chiều dương của trục Oz .

5.2.5. Định lý Stokes

Phát triển công thức Green trong không gian cho ta mối liên hệ giữa tích phân đường loại hai theo một đường kín L với tích phân mặt loại hai trên mặt cong định hướng S giới hạn bởi L .

Định lý Stokes : Cho S là một mặt định hướng, trơn, biên của nó là một đường cong kín trơn từng khúc và không tự cắt. Giả sử các hàm $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong miền chứa S , thì khi đó ta có công thức

$$\begin{aligned} \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ = \oint_L P dx + Q dy + R dz \end{aligned} \quad (5)$$

trong đó chiều lấy tích phân trên L được chọn sao cho một người đi dọc theo L , theo chiều đó nhìn thấy mặt S liền kề với mình về bên trái.

Công thức (5) được gọi là công thức Stokes.

Ví dụ 1. Tính $I = \int_L (x - y^3) dx + (x^3 + y) dy + z dz$, L là giao của các mặt $5x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = 2x$, có chiều ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn về phía trục Oz .

Chú ý: Công thức Stokes (20) thường được dùng dưới dạng liên hệ với tích phân mặt loại một:

$$\begin{aligned} \oint_L P dx + Q dy + R dz \\ = \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) dS. \end{aligned}$$

Để dễ nhớ công thức trên có thể được viết dưới dạng định thức hình thức:

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

trong đó $\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ là véc tơ pháp tuyến của mặt cong định hướng S .

Ví dụ 2. Tính tích phân đường $I = \oint_L y dx + z dy + x dz$, trong đó L là giao của các mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$, có hướng ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ hướng dương của trục Ox .

5.2.6. Hoàn lưu (lưu số), vectơ xoáy (rôta), trường ống, trường thế, hàm thế vị

Cho mặt cong kín S là biên của miền $\Omega \subseteq R^3$, $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến ngoài của S thì thông lượng là hiệu của lượng chất lỏng chảy từ trong ra và lượng chất lỏng chảy từ ngoài vào. Nếu $\Phi > 0$, có nghĩa là lượng chất lỏng từ trong ra nhiều hơn từ ngoài vào, điều đó chứng tỏ trong miền Ω có **điểm nguồn**. Ngược lại $\Phi < 0$, thì lượng chất lỏng từ ngoài vào nhiều hơn từ trong ra, khi đó trong miền Ω có **điểm rò**.

Người ta chứng minh được rằng, với trường vectơ $\vec{F}(M)$ trong miền Ω , tại điểm $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$:

+ Nếu $\text{div } \vec{F}(M_0) > 0$ thì điểm M_0 là điểm nguồn.

+ Nếu $\text{div } \vec{F}(M_0) < 0$ thì điểm M_0 là điểm rò.

+ Nếu với $\forall M \in \Omega$ mà $\text{div } \vec{F}(M) = 0$ thì trường vectơ $\vec{F}(M)$ gọi là **trường ống** trong miền Ω . (tức là thông lượng đi vào bằng thông lượng đi ra)

Định nghĩa 1. Cho trường vectơ

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$$

với $(x, y, z) \in \Omega$, L là đường cong kín nằm trọn trong Ω . Ta gọi

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz$$

là **hoàn lưu (lưu số) của trường vectơ $\vec{F}$** dọc theo đường cong kín L . Ký hiệu là C .

$$\text{Vậy} \quad C = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz. \quad (6)$$

Ký hiệu $\vec{ds}$ là vectơ nằm theo hướng tiếp tuyến dương của đường cong kín L có các thành phần dx, dy, dz thì $Pdx + Qdy + Rdz = \vec{F} \cdot \vec{ds}$, do đó công thức (6) được viết lại dưới dạng

$$C = \oint_L \vec{F} \cdot \vec{ds}. \quad (7)$$

Cho trường vectơ $\vec{F} = P \vec{i} + Q \vec{j} + R \vec{k}$. Vectơ sau đây

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}, \quad (8)$$

được gọi là **vectơ xoáy (rôta)** của trường vectơ $\vec{F}$.

$$\text{Chú ý. Cách ghi nhớ} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}$$

Chú ý. Lưu số có thể viết dưới các dạng:

$$\begin{aligned} l &= \oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy; \\ l &= \oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \\ &= \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) dS. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.(2017) Tính lưu số của $\vec{F}(x, y, z) = (x^3 + y^3 + z^3)(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$, dọc theo dao tuyến của hai mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và $x + y + z = 1$.

Ví dụ 2. Cho trường vectơ $\vec{F} = e^x y \vec{i} + (e^x + z) \vec{j} + y \vec{k}$. Tính $\overrightarrow{rot} \vec{F}$.

Người ta chứng minh được rằng: Hoàn lưu của trường vectơ $\vec{F}$ dọc theo đường cong kín L bằng thông lượng của trường vectơ xoáy $\overrightarrow{rot} \vec{F}$ qua mặt cong S nào đó có biên L

$$C = \Phi \Rightarrow \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S r_n ds$$

trong đó $r_n = ch_{\vec{n}} \overrightarrow{rot} \vec{F}$, $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt cong S .

Để hiểu rõ ý nghĩa của $\overrightarrow{rot} \vec{F}$ ta xét dòng nước chảy. Ta đã biết

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$$

biểu thị công sinh ra khi đi dọc theo cung $\widehat{AB}$. Trong điều kiện bình thường thì công sinh ra trên đường cong kín bằng 0. Nếu trong dòng chảy có xoáy tại điểm M_0 , L là đường cong kín khá nhỏ bao quanh M_0 thì công sinh ra không bằng 0 mà hướng của L thuận với chiều xoáy thì công sinh ra là dương, ngược lại là âm.

Theo ý nghĩa đó, người ta nói rằng: nếu $\overrightarrow{rot} \vec{F}(M_0) = \vec{0}$ thì M_0 là **điểm không xoáy**, còn nếu $\overrightarrow{rot} \vec{F}(M_0) \neq \vec{0}$ thì M_0 là **điểm xoáy**.

Trường vectơ $\vec{F}(M)$ được gọi là **trường thế** trong miền Ω nếu tồn tại trường vô hướng u sao cho $\overrightarrow{grad} u = \vec{F}$ trên Ω . Khi đó u được gọi là **hàm thế vị**.

Định lý. Điều kiện cần và đủ để trường vectơ $\vec{F} = \vec{F}(M)$ là một trường thế trong miền Ω là $\overrightarrow{rot} \vec{F}(M) = \vec{0}$, $\forall M \in \Omega$.

Nếu trường vectơ $\vec{F} = \vec{F}(M)$ là một trường thế trong miền Ω thì hàm thế vị u được xác định theo công thức

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz + C$$

trong đó $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$.

Ví dụ 3.(2023) Chứng minh rằng

$$\vec{F} = e^{2x}(6y^2 - 10z^3) \vec{i} + (6ye^{2x} + 4z^2) \vec{j} + (8yz - 15z^2e^{2x}) \vec{k}$$

là trường thế. Tìm hàm thế vị của $\vec{F}$.

Ví dụ 4.(2022) Cho trường vectơ $\vec{F} = 2x \vec{i} + (e^y z + 3y^2 z) \vec{j} + (e^y + y^3) \vec{k}$ Tính $\overrightarrow{rot} \vec{F}$ và tìm hàm thế vị của $\vec{F}$ (nếu có).

Bài tập

- (2023CK) Tính tích phân mặt $I = \iint_S (z + 2) dS$ trong đó S là phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ với $1 \leq z \leq 3$. ĐS. $I = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \int_1^3 (r + 2)r dr = \frac{\pi 100\sqrt{2}}{3}$.
- (2022CK) Tính $I = \iint_S (x + \frac{3y}{2} + \frac{z}{2} + 1)^2 dS$ với $S: 2x + 3y + z = 6, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, ĐS $48\sqrt{48}$
- (2021CK) Tính tích phân $I = \iint_S (x^3 + y^4 z) dydz + y^3 dx dz + z^3 dx dy$, trong đó S là mặt cầu $4x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0$ có hướng theo chiều dương trục Oz. ĐS. $I = 3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (4r^2 - 3r^2 \cos^2 \theta) 4r^2 \sin \theta dr = \frac{72\pi}{5}$.
- (2022CK) Tính tích phân $I = \iint_S z dydz + x^3 dx dz + 3xz dx dy$, trong đó S là mặt phía dưới trụ $z = x^2$ giới hạn bởi các mặt $y = 0, y = 1 - z$ khi nhìn theo hướng dương trục Oz. ĐS $= 0$
- (2019CK) Tính tích phân $I = \iint_S y^2 z dx dy + xz dy dz + x^2 y dx dz$, trong đó S là phía trên của mặt $z = 1 - x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. ĐS. $I = \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^1 dr \int_0^{1-r^2} (r^2 + z) r dz = \frac{\pi}{12}$.
- (2023) Tính thông lượng của trường vectơ $\vec{F}(x, y, z) = (x + y) \vec{i} - 2y \vec{j} + (z^2 + 1) \vec{k}$ qua phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$, hướng lên trên. HD. $\Phi = \iint_{S \cup S_0} - \iint_{S_0} = I_1 - I_2$. $\Phi = I_1 - I_2 = \frac{5\pi}{6}$
- (2023) Cho (S) là biên của miền $\Omega: 1 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$, hướng ra ngoài. Tính thông lượng của trường vectơ $\vec{F}(x, y, z) = x^3 \vec{i} + y^2 z \vec{j} + xyz \vec{k}$ qua mặt (S) . HD. $I = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\sqrt{3}} dr \int_0^{4-r^2} r^2 \cdot r dz = \frac{27\pi}{4}$
- (2023) Tìm đạo hàm theo hướng $\vec{l}$ của hàm $u = \ln(x^2 + y^2 + yz)$ tại điểm $A(1; 1; 1)$ với $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$ và $B(-1; 2; 3)$. HD. $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = (\overrightarrow{\text{grad}} u, \vec{l}) = \frac{2}{3} \frac{-2}{3} + \frac{3}{3} \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$
- (2023) Tính thông lượng của trường vectơ $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2 - 3z^2) \vec{i} + (2x - z^3) \vec{j} + (x^2 z + y^2) \vec{k}$ qua mặt kín (S) là biên của miền $V: 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$, hướng ra ngoài.. HD. $I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 dr \int_0^{1-r^2} r^2 \cdot r dz = 2\pi \int_0^1 r^3 (1 - r^2) dr = \frac{\pi}{6}$
- (2021) Cho trường vectơ $\vec{F}(x, y, z) = x(y + z) \vec{i} + y(z + 2mx) \vec{j} + z(x + y) \vec{k}$, m là tham số. Gọi L là giao của mặt $x^2 + y^2 = 2y$ và mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0$. Tìm m để lưu số của $\vec{F}$

dọc theo L (hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của trục Oz) bằng không.

$$HD. l = \iint_D (2m-1) y dx dy = (2m-1) \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} r^2 \sin\varphi dr = (2m-1)\pi$$

$$Vây l = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

11. (2021) Tìm hướng mà tại $A(1; 1; 1)$ hàm số $f(x, y, z) = x^2 + 2x^2y + yz$ giảm nhanh nhất. Tính đạo hàm theo hướng này tại A .

$$HD. \frac{\partial u(M)}{\partial \vec{l}} = \overrightarrow{grad} f(A) \cdot \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = 6 \cdot \frac{-6}{\sqrt{46}} + 3 \cdot \frac{-3}{\sqrt{46}} + 1 \cdot \frac{-1}{\sqrt{46}} = -\sqrt{46}.$$

12. (2021) Trường véc tơ

$$\vec{F} = (3x^2y + 2z^2) \vec{i} + (x^3 + 6y) \vec{j} + (4xz + e^z) \vec{k}$$

Có phải là trường thế không?. Tìm hàm thế vị của $\vec{F}$ (nếu có).

$$HD. u(x, y, z) = \int_0^x 0 dx + \int_0^y (x^3 + 6y) dy + \int_0^z (4xz + e^z) dz + C \\ = x^3y + 3y^2 + 2xz^2 + e^z + C$$

13. (2017) Cho trường vectơ $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2 + z) \vec{i} + (xy^2 + z) \vec{j}$. Tính thông lượng của $\vec{F}$ qua mặt paraboloid $S: z = x^2 + y^2$ với $z \leq 1$, hướng lên trên.

$$HD. l = \iint_S \frac{1}{\sqrt{3}} [(y^2 - z^2) + (z^2 - x^2) + (x^2 - y^2)] dx dy = 0$$

14. (2017) Chứng minh trường véc tơ

$$\vec{F} = e^{x^2+y^2+z^2} \{(2x^2yz + yz) \vec{i} + (2y^2xz + xz) \vec{j} + (2z^2yx + xy) \vec{k}\}$$

là trường thế không. Tìm hàm thế vị.

$$HD. u(x, y, z) = xyze^{x^2+y^2+z^2} + C.$$

15. (2014). Cho hàm $u = x^3 + 2yz^2 + 3xyz$. Tính đạo hàm $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(A)$ trong đó $\vec{n}$ là vec tơ pháp tuyến hướng ra ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ tại điểm $A(1; 1; 1)$.

$$HD. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = (\overrightarrow{grad} u, \vec{n}) = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 7 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}.$$

16. (2014) Tính thông lượng của trường vectơ

$$\vec{F}(x, y, z) = (\cos z + xy^2) \vec{i} + xe^{-z} \vec{j} + (x^2z + y) \vec{k}$$

qua mặt kín (S) là biên của miền $V: \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2$, hướng ra ngoài..

$$HD. I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_r^2 r^2 \cdot r dz = 2\pi \int_0^\pi ((2r^3 - r^4)) dr = \frac{16\pi}{5}$$

17. (2014) Chứng minh trường véc tơ

$$\vec{F} = (3x^2y + 2z^2) \vec{i} + (x^3 + 6y) \vec{j} + (4xz + e^z) \vec{k}$$

là trường thế. Tìm hàm thế vị.

$$HD. u(x, y, z) = x^3y + 2xz^2 + 3y^2 + e^z + C.$$