

Chương 1

PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN SỐ

I. Hàm một biến số

1.1. Số thực

1.1.1. Một số ký hiệu toán học cần thiết.

Tập hợp $A = \{x \mid \text{sao cho } x \text{ có tính chất } P \text{ nào đó}\}$ - đọc là: tập hợp A bao gồm các phần tử x có tính chất P nào đó.

$\forall x \in A$ đọc là với mọi phần tử x đều thuộc tập hợp A .

$\exists y \notin B$ đọc là tồn tại phần tử y không thuộc tập hợp B .

$A \subset B$ đọc là A là tập hợp con của tập hợp B , hay tập hợp B chứa tập hợp A .

$:=$ được định nghĩa là (hay có nghĩa là).

$A \Rightarrow B$ đọc là A kéo theo B hay A là điều kiện cần để có B .

$A \Leftrightarrow B$ đọc là A là điều kiện cần và đủ của B .

1.1.2. Tập hợp số thực

1) Tập hợp số tự nhiên $N := N = \{0, 1, 2, \dots\}$, $N^+ = N \setminus \{0\}$

2) Tập hợp số nguyên $Z := Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

3) Tập hợp số hữu tỷ $Q := Q = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in Z, q \neq 0\right\}$.

Mọi số hữu tỷ đều có thể viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn hay vô hạn nhưng tuần hoàn và ngược lại.

Ví dụ 1. Số $\frac{4}{5} = 0,8$; ngược lại $0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

Ví dụ 2. Số $a = \frac{4}{3} = 1,333 \dots = 1, \bar{3}$ là số thập phân vô hạn tuần hoàn.

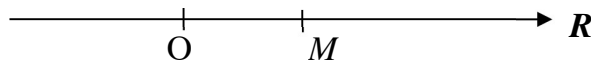
4) Số thập phân vô hạn không tuần hoàn gọi là số vô tỷ, đồng thời số vô tỷ không thể viết được dưới dạng tỷ số của hai số nguyên.

Ví dụ 3. Các số $\sqrt{2} = 1,41419 \dots$; $\pi = 3,14159 \dots$ là các số thập phân vô hạn không tuần hoàn và gọi là các số vô tỷ.

5) Tập hợp các số hữu tỷ và vô tỷ gọi là tập hợp số thực và ký hiệu là R .

Như vậy $N \subset Z \subset Q \subset R$.

1.1.3. Trục số thực: Xét đường thẳng, lấy điểm O làm gốc, bên phải gốc O là một chiều dương, ngược lại là chiều âm (Hình 1.1).



Hình 1.1

1.1.4. Trị tuyệt đối của số thực, khoảng, đoạn số thực.

Định nghĩa 1.1.1. Với số thực $a \in R$. Ta gọi **trị tuyệt đối** của số a là số thực không âm, ký hiệu:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$$

Ví dụ 4. $|5| = 5$; $|-7| = -(-7) = 7$.

Một số tính chất của trị số tuyệt đối

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad |a - b| \geq |a| - |b|,$$

$$|ab| = |a||b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad (b \neq 0).$$

Một số ký hiệu

$$\forall x \in (a, b) \Leftrightarrow a < x < b \text{ đọc là khoảng } (a, b).$$

$$\forall x \in [a, b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b \text{ đọc là đoạn } [a, b].$$

$\forall x \in (a, b] \Leftrightarrow a < x \leq b$ đọc là đoạn hở bên trái $(a, b]$.

$\forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow -\infty < x < +\infty$.

Ta cũng có: $|x - a| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < x - a < \alpha \Rightarrow a - \alpha < x < a + \alpha$.

$$|x - a| > \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x - a > \alpha \\ x - a < -\alpha \end{cases}.$$

1.1.5. Tập hợp bị chặn. Nguyên lý cận trên đúng, cận dưới đúng

Định nghĩa 1.1.2. Cho tập số thực $A \subset \mathbf{R}$.

1) Tập hợp A gọi là bị chặn trên, nếu $\exists M \in \mathbf{R}$ sao cho $\forall x \in A \Rightarrow x \leq M$. Trong trường hợp này ta cũng nói M là cận trên của tập hợp A .

2) Tập hợp B gọi là bị chặn dưới nếu $\exists m \in \mathbf{R}$ sao cho $\forall y \in B \Rightarrow y \geq m$. Trong trường hợp này ta cũng nói m là cận dưới của tập hợp B .

3) Tập hợp A vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới gọi là tập hợp bị chặn (hay tập hợp giới nội). Trong trường hợp tập hợp A bị chặn trên bởi số M , và M là một cận trên, số M nhỏ nhất trong tập hợp tất cả các cận trên của tập hợp A được gọi là cận trên đúng của tập hợp A .

Ký hiệu $M^* = \sup A$ (đọc là supremum).

Tương tự số m^* là số lớn nhất trong tất cả các cận dưới của tập hợp B được gọi là cận dưới đúng của tập hợp B và ký hiệu: $m^* = \inf B$ (đọc là infimum).

Nếu số $M^* \in A$ thì $M^* = \max A$ (cực đại) và nếu số $m^* \in B$ thì $m^* = \min A$ (cực tiểu).

Như vậy số $\max$ và $\min$ thì thuộc tập hợp đó, còn $\sup$ và $\inf$ có thể không thuộc tập hợp đang xét.

Ví dụ 5. Xét $A = \{x \mid x < 1\}$.

Tập hợp này không tồn tại $\max A$, còn $\sup A = 1$ (là cận trên đúng của tập hợp A).

Đối với $B = \{x \mid x \leq 1\}$ thì $\max B = \sup B = 1$.

1.2. Giới hạn của dãy số thực

Định nghĩa 1.2.1. Xét dãy số thực $\{x_n\}_{n=0,1,2,\dots}$. Số a được gọi là giới hạn của dãy số $\{x_n\}$ nếu $\forall \varepsilon > 0$ cho trước, $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}^*$: $\forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$.

Ký hiệu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ hay $x_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow \infty$.

Trong trường hợp $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ (hữu hạn) ta cũng nói dãy $\{x_n\}$ **hội tụ** tới a , còn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ không tồn tại hay có giới hạn là vô hạn (∞) thì ta nói dãy $\{x_n\}$ **phân kỳ**.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{2}{3}$.

Định nghĩa 1.2.2. Dãy $\{x_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ có giới hạn là vô hạn nếu $\forall M > 0$ đủ lớn cho trước, $\exists n_0(M)$: $\forall n > n_0 \Rightarrow |x_n| > M$. Ký hiệu là $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

Ví dụ 2. Xét dãy số $x_n = 2n + 3$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

Định lý 1.2.1. Nếu dãy số $\{x_n\}$ tồn tại giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.

Định lý 1.2.2. Giả sử các dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ tồn tại các giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ thì:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \pm b,$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \cdot b,$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{a}{b}, \quad (b \neq 0).$$

$$4) \text{ Nếu } x_n \leq y_n \quad \forall n > n_0 \text{ thì } a \leq b.$$

Chú ý: $\lim_{n \rightarrow \infty} C = C$, $C = \text{const}$.

Từ định lý này, **có thể suy ra trường hợp** $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ gọi là dạng bất định.

Định lý 1.2.3. Cho ba dãy số $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ và nếu

- i) $x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n > n_0,$
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a,$

thì $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a.$

Định lý 1.2.4. Nếu dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn các điều kiện

- i) dãy $\{x_n\}$ đơn điệu tăng $:= x_{n+1} \geq x_n \forall n > n_0,$
- ii) dãy $\{x_n\}$ bị chặn trên $:= x_n \leq M \forall n > n_0$

thì dãy số $\{x_n\}$ tồn tại giới hạn.

Còn nếu

- i) dãy $\{x_n\}$ đơn điệu giảm $:= x_{n+1} \leq x_n \forall n > n_0,$
- ii) dãy $\{x_n\}$ bị chặn dưới $:= x_n \geq m \forall n > n_0,$

thì dãy số $\{x_n\}$ tồn tại giới hạn.

Ví dụ 3. Tìm các giới hạn của các dãy số sau:

$$x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}; \quad y_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \quad (\text{dạng } \frac{\infty}{\infty}); \quad z_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \quad (\text{dạng } 0 \cdot \infty).$$

Ngoài các dạng bất định trên, ta còn gặp một số dạng khác: $0^0, \infty^0, 1^\infty, 0^\infty.$

Ví dụ 4. Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1. (\infty^0).$

Giải: $x_n = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}.$

$$\text{Ta có } 1 \leq \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{n-2 \text{ số}}} \leq \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + \overbrace{1 + \dots + 1}^{n-2 \text{ số}}}{n} = \frac{2\sqrt{n} + (n-2)}{n} \quad (\text{BĐT Cauchy}).$$

$$\text{Hay } 1 \leq \sqrt[n]{n} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n} \text{ mà } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n} = 1, \text{ Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

$$\textbf{Ví dụ 5.} \text{ Cho dãy số } x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \dots x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} \quad (n-1 \text{ số}).$$

Hãy chứng minh dãy $\{x_n\}$ tồn tại giới hạn và tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$

Giải: Ta sẽ chỉ ra rằng dãy $\{x_n\}$ đơn điệu tăng và bị chặn trên thì tồn tại giới hạn.

$$\text{Thật vậy } x_1 = \sqrt{2} < 2; \quad x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} < \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Bằng quy nạp, giả sử đúng với $n = k = x_k < 2$, ta chỉ ra đúng với $n = k + 1$.

$$\text{Ta có } x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2 + 2} = 2, \text{ do đó dãy } x_n \text{ bị chặn trên bởi số } 2.$$

$$\text{Dãy } \{x_n\} \text{ là dãy đơn điệu tăng vì } x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} > \sqrt{x_n + x_n} = \sqrt{2x_n} > \sqrt{x_n \cdot x_n} = x_n.$$

Ta tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$ Giả sử $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0.$ Từ $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$

$$\Rightarrow x_n^2 + 1 = 2 + x_n \Rightarrow a^2 = 2 + a \Rightarrow a = \frac{-1}{2} \text{ (Loại)}. \text{ Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2.$$

Ví dụ 6. (2017N1) Xét sự hội tụ và tìm giới hạn (nếu có) của dãy số $\{x_n\}$:

$$x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right), n \geq 1$$

1.3. Hàm số một biến số

1.3.1. Một số khái niệm

Định nghĩa 1.3.1. Cho hai tập hợp khác rỗng $X \subseteq \mathbf{R}, Y \subseteq \mathbf{R}.$ Nếu mỗi phần tử $x \in X$, theo một quy luật xác định, đặt tương ứng với một và chỉ một phần tử $y \in Y$, thì ta nói trên tập hợp X cho hàm số f (hay ánh xạ f) có tập hợp giá trị trên $Y.$

Ký hiệu là $f : X \rightarrow Y$ hay $x \in X, y = f(x) \in Y.$

Tập hợp X gọi là **miền xác định** (MXĐ) của hàm số $f(x)$, ký hiệu là $D(f)$; còn tập hợp Y gồm các số có dạng $y = f(x)$ gọi là **miền giá trị** (MGT) của hàm số $f(x)$; ký hiệu là $R(f)$.

Miền xác định của hàm số trong các trường hợp đơn giản là:

- Khoảng (khoảng mở) (a, b) hay $a < x < b$.
- Đoạn (khoảng đóng) $[a, b]$ hay $a \leq x \leq b$.
- Khoảng đóng bên phải $(a, b]$ hay $a < x \leq b$.
- Khoảng nửa vô hạn $(a, +\infty)$ hay $a < x < +\infty$.
- Khoảng vô hạn $(-\infty, +\infty)$ hay $-\infty < x < +\infty$.

$MXĐ$ cũng có thể là hợp của một số khoảng hay đoạn,....

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là quỹ tích các điểm của mặt phẳng xOy với các tọa độ là $(x, f(x)), x \in X$.

Ví dụ 1. Tìm miền xác định, miền giá trị của các hàm số sau:

- $f(x) = 3x + 3$,
- $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$,
- $f(x) = \arccos\left(\ln \frac{1}{x}\right)$ (2022N1) ,
- $f(x) = \arccos(e^x)$, (2017N1)
- $f(x) = \sqrt{2x - 1} + 4 \arcsin \frac{3x-1}{2}$, (2017N1)

+ $f(x)$ có $MXĐ$ $X = [-l, l]$ hay $X = (-l, l) \subset \mathbf{R}$ gọi là **hàm số chẵn** nếu $f(-x) = f(x)$, với $\forall x \in X$.

+ $f(x)$ có $MXĐ$ $X = [-l, l]$ hay $X = (-l, l) \subset \mathbf{R}$ gọi là **hàm số lẻ** nếu $f(-x) = -f(x)$, với $\forall x \in X$.

Hàm $f(x)$ gọi là **hàm tuần hoàn** trên tập X nếu tồn tại số dương T sao cho $\forall x, x + T \in X$ ($MXĐ$) ta có đẳng thức $f(x + T) = f(x)$. Số T gọi là chu kỳ của hàm số. Chu kỳ cơ sở của hàm số là số dương T bé nhất có tính chất trên.

- Đồ thị hàm số chẵn đối xứng qua trục tung.
- Đồ thị hàm số lẻ đối xứng qua gốc tọa độ $O(0; 0)$.
- Đồ thị hàm số tuần hoàn lặp lại sau mỗi chu kỳ.

Ví dụ 2. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

- $f(x) = \cos \frac{2x}{3}$
- $f(x) = \lg(x + \sqrt{1 + x^2})$.
- $f(x) = \sin 6x + \tan 4x$.
- $f(x) = \sqrt[5]{5 - x} + \sqrt[5]{5 + x}$. (2019N2)
- $f(x) = \sqrt{2 - x} + \sqrt{2 + x}$. (2022N1)

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên X :

✓ Nếu $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, ($f(x_1) \leq f(x_2)$) gọi là **hàm đơn điệu tăng** (không giảm) trên X .

✓ Nếu $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, ($f(x_1) \geq f(x_2)$) gọi là **hàm đơn điệu giảm** (không tăng) trên X .

✓ Hàm đơn điệu chỉ tăng hoặc giảm trên $MXĐ$ X gọi chung là **hàm đơn điệu**.

✓ Hàm số tăng trên $MXĐ$ X còn gọi là **hàm số đồng biến**.

✓ Hàm số giảm trên $MXĐ$ X còn gọi là **hàm số nghịch biến**.

Ví dụ 3. Xét tính đơn điệu của hàm số $f(x) = x^3 + 3x + 5$.

1.3.2. Hàm số hợp

Định nghĩa 1.3.2. Cho 3 tập hợp $X \subseteq \mathbf{R}$; $Y \subseteq \mathbf{R}$; $Z \subseteq \mathbf{R}$. Với mỗi $x \in X$ cho ta một và chỉ một $y = f(x) \in Y$ với một $y \in Y$ cho ta một và chỉ một $z = g(y) \in Z$, $\Rightarrow z = g(y) = g[f(x)] = h(x) \in Z$ với $x \in X$, gọi là hàm số hợp của hàm số g và hàm số f , x là số độc lập, $y = f(x)$ là biến số trung gian. Hàm số hợp $h(x)$ còn ký hiệu là $h(x) = g \circ f(x)$ và h là ánh xạ $X \rightarrow Z$.

Chú ý: $g[f(x)] \neq f[g(x)]$.

Ví dụ 4. Cho $X = Y = Z = \mathbf{R}$ và $y = f(x) = x^2 + 2$; $y = g(x) = 2^x$,

1.3.3. Hàm số ngược

Định nghĩa 1.3.3. Cho $X \subseteq \mathbf{R}$; $Y \subseteq \mathbf{R}$.

Song ánh xạ: $X \rightarrow Y, x \in X, x \mapsto y = f(x) \in Y$ (sự tương ứng 1-1 giữa các phần tử $x \in X$ và các phần tử $y \in Y$). Nếu với mỗi $y \in Y$ tương ứng xác định được $x = g(y) \in X$ thì hàm số g được gọi là hàm số ngược của hàm số f .

Ký hiệu $g = f^{-1}: Y \rightarrow X$, nghĩa là $f^{-1}: y \mapsto x = f^{-1}(y) \in X$.

Từ định nghĩa ta suy ra, nếu $y = f(x)$ (1) là song ánh từ $X \rightarrow Y$ thì ta giải x theo y , ta được hàm số ngược của hàm số $y = f(x)$ là $x = f^{-1}(y)$ (2).

Đồ thị của hai hàm số (1) và (2) trùng nhau trên cùng hệ trục tọa độ.

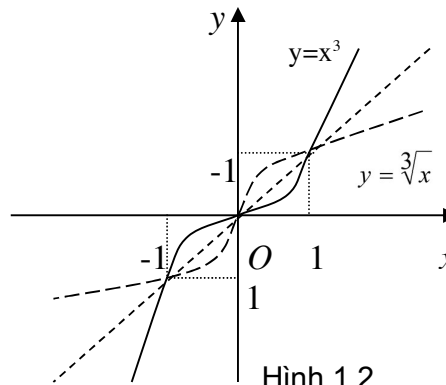
Trong thực tế ta vẫn thường sử dụng x là biến số độc lập, y là biến số phụ thuộc, từ (2) đổi vai trò của x và $y \Rightarrow y = f^{-1}(x)$ (3) cũng được gọi là hàm số ngược của hàm số $y = f(x)$.

Đồ thị hàm số (1) và (3) đối xứng với nhau qua đường phân giác thứ nhất $y = x$.

Ví dụ 5. Cho $y = f(x) = x^3$ (*), f là song ánh từ $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

Từ (*) $\Rightarrow x = \sqrt[3]{y} = f^{-1}(y)$, đổi vai trò x và $y: y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ (2*).

Đồ thị (2*) đối xứng với đồ thị (*) qua đường thẳng $y = x$ (Hình 1.2)



Hình 1.2

Ví dụ 6. (2022N1) Tìm hàm $f(x)$ biết rằng $(f \circ g^{-1})(x) = x^3 - x + 1$ và $g(x) = x + e^x$.

Ví dụ 7. (2019N2) Tìm hàm ngược của hàm số $y = \frac{2e^x}{e^x + 1}$

Ví dụ 8. (2022N1) Tìm hàm ngược của hàm số $y = \ln \frac{x+1}{2x-1}$

Ví dụ 9. (2022N3) Tìm hàm ngược của hàm số $y = \text{sh}(2x)$

1.4. Hàm số sơ cấp cơ bản, hàm sơ cấp**1.4.1. Các hàm số sơ cấp cơ bản**

1) Hàm số lũy thừa: Dạng $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbf{R}$.

Miền xác định phụ thuộc vào α , chẳng hạn $\alpha \in \mathbf{N}$ thì $\text{MXĐ } \forall x \in \mathbf{R}$. α nguyên âm, thì $\text{MXĐ } \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

$\alpha \in \bar{\mathbf{Q}} = \left\{ \frac{1}{q} \in \mathbf{N}^*, q \neq 0 \right\}$, thì $\text{MXĐ } \forall x \in \mathbf{R}$, nếu q lẻ, và $\text{MXĐ } x \geq 0$ nếu q chẵn,

Nếu α là số vô tỷ thì quy ước chỉ xét $x \geq 0$ khi $\alpha > 0$ và $x < 0$ khi $\alpha < 0$.

2) Hàm số mũ: Dạng $y = a^x$, a gọi là cơ số, $a > 0$, $a \neq 1$.

MXĐ $\forall x \in \mathbf{R}$, MGT $0 < y < +\infty$. Đồ thị hàm số mũ luôn đi qua điểm $(0; 1)$;

Hàm số đồng biến khi $a > 1$, nghịch biến khi $0 < a < 1$.

Các hàm số hypecbôn. Trong hàm số mũ, người ta cũng

xét đến loại hàm số mũ có cơ số tự nhiên e , (e là số vô tỷ) $y = \operatorname{ch} x$

Ta định nghĩa cho các hàm hypecbôn sau:

Hàm số $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ gọi là hàm cosin-hypecbôn,

$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ gọi là hàm sin-hypecbôn.

$y = \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ gọi là hàm tang-hypecbôn.

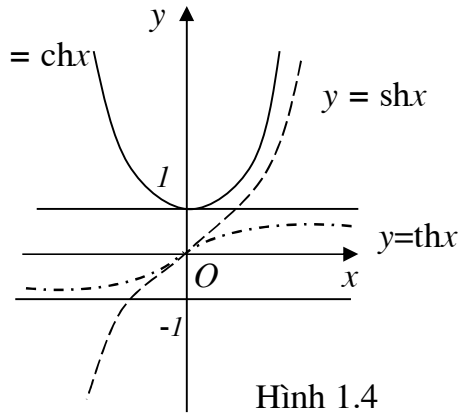
$y = \operatorname{coth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x}$ gọi là hàm số cotang-hypecbôn.

Ta cũng có một số công thức liên hệ giữa chúng với nhau:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad (2022N1);$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

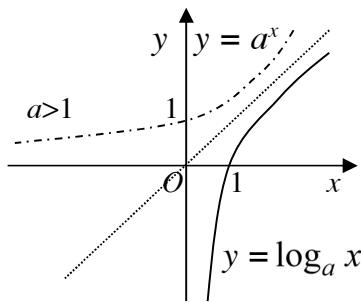
$$\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x; \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \dots \quad (\text{Độc giả tự kiểm tra}).$$



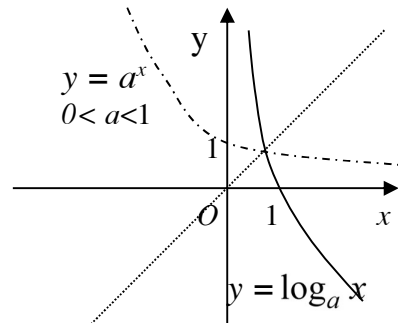
Hình 1.4

3) Hàm số logarit: hàm số logarit là hàm số ngược của hàm số mũ $y = a^x$ (1) ($a > 0$, $a \neq 1$) thì $x = \log_a y$, (2), đổi vai trò của x và y ta được $y = \log_a x$ (3) gọi là hàm số logarit, a là cơ số ($a > 0$, $a \neq 1$), MXĐ $\forall x > 0$.

Đồ thị hàm số (3) đối xứng với đồ thị hàm số (1) qua đường phân giác thứ nhất $y = x$.



Hình 1.5a



Hình 1.5b

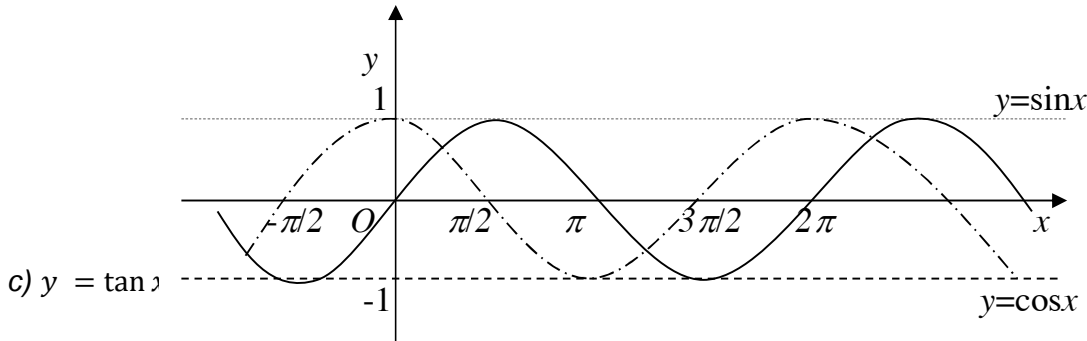
$y = \log_a x$: tăng (hay đồng biến) nếu $a > 1$ (Hình 1.5a),

giảm (hay nghịch biến) nếu $0 < a < 1$ (Hình 1.5b).

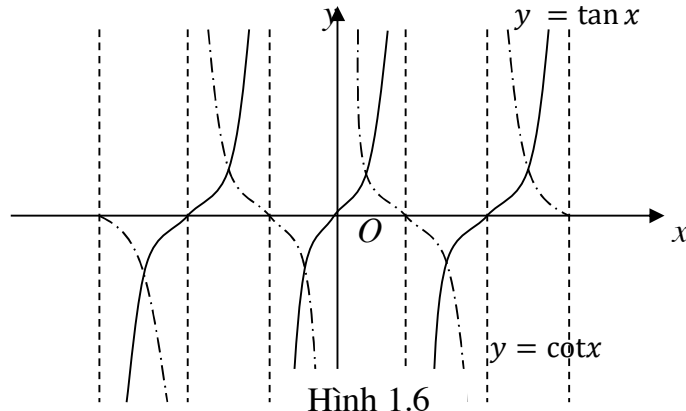
Khi $a = 10$, logarit thập phân, $y = \lg x$, Khi $a = e$ logarit tự nhiên, ký hiệu $y = \ln x$.

4) Hàm số lượng giác (nhắc lại). Bốn hàm số lượng giác thông thường là:

a) $y = \sin x$, MXĐ $\forall x \in \mathbf{R}$, b) $y = \cos x$, MXĐ $\forall x \in \mathbf{R}$,



Hình 1.6a



Hình 1.6

5) Hàm số lượng giác ngược:

a) Xét $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, thì $y = f(x) = \sin x$ (1) là hàm số đơn điệu, nên tồn tại hàm ngược $x = f^{-1}(y)$, ký hiệu là $x = \arcsin y$ (2), đổi vai trò x và y cho nhau ta được $y = \arcsin x$, là hàm số ngược của hàm số $y = \sin x$.

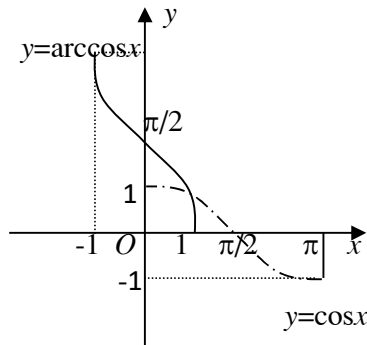
Vậy $y = \arcsin x$ (3) $MXĐ |x| \leq 1$, $MGT \frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, và có thể nói $y = \arcsin x$ là cung mà có $\sin y = x$. Đồ thị hàm số (3) và (1) đối xứng qua đường phân giác thứ nhất $y = x$ (Hình 1.7a).

Do $y = \sin x$ là hàm tuần hoàn chu kỳ $T = 2\pi$, nên: $y = \sin x = \sin(x + 2k\pi)$; $k \in \mathbb{Z}$, thì

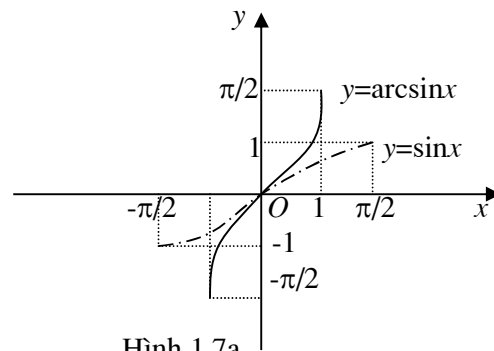
$$y = \begin{cases} \arcsin x + 2k\pi \\ \pi - \arcsin x + 2k\pi \end{cases} \text{ là hàm đa trị và } \arcsin x \text{ gọi là định trị chính}$$

b) Xét $x \in [0, \pi]$, thì hàm $y = f(x) = \cos x$ là hàm số đơn điệu, nên tồn tại hàm ngược. Tương tự trên ta có $y = \arccos x$ là hàm số ngược của hàm số $y = \cos x$.

Vậy $y = \arccos x$ là cũng có $\cos y = x$ (Hình 1.7b). $MXĐ |x| \leq 1, MGT 0 \leq y \leq \pi$.



Hình 1.7b



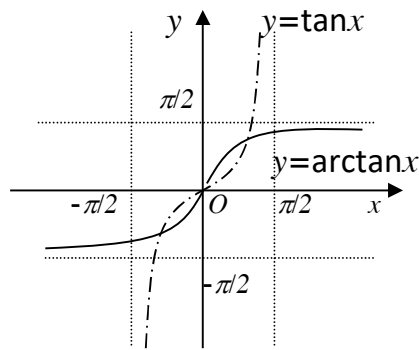
Hình 1.7a

Đồng thời với $y = \cos x = \cos(x + 2k\pi)$ thì $y = \pm \arccos x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\arccos x$ là định trị chính.

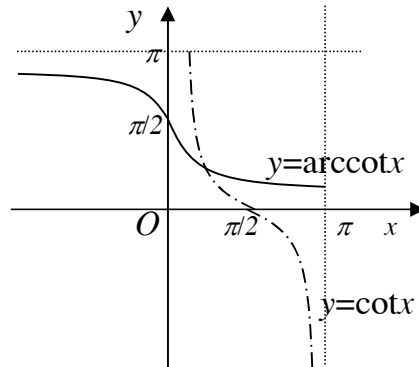
c) Xét $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ thì $y = \tan x$ là hàm đơn điệu, hoàn toàn như trên ta có hàm ngược của hàm $y = \tan x$ là $y = \arctan x$, $MXĐ \forall x \in \mathbb{R}, MGT -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$,

Đồng thời ta cũng có $y = \tan x = \tan(x + k\pi) \Rightarrow y = \arctan x + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $\arctan x$ là định trị chính.

d) Xét $x \in (0; \pi), y = \cot x \Rightarrow y = \operatorname{arccot} x$ là hàm số ngược của hàm $y = \cot x$; $\operatorname{MXĐ} \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{MGT} 0 < y < \pi$. Và ta cũng có $y = \operatorname{arccot} x + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; $\operatorname{arccot} x$ là định trị chính (Hình 1.9).



Hình 1.8



Hình 1.9

1.4.2. Hàm sơ cấp: Với 5 loại hàm số hữu hạn cơ bản xét trên, ta có thể tổ hợp bằng một số hữu hạn các phép tính đại số (cộng, trừ, nhân, chia) và phép lập hàm số hợp để tạo nên hàm số mới (kể cả hàm hằng) gọi là hàm số sơ cấp.

Ví dụ 1. $y = ax + b$; $y = ax^2 + bx + c$; $y = e^x \sin(3x + 2) - \log_3(x^2 + 2)$ là những hàm số sơ cấp.

Trong hàm số sơ cấp ta phân biệt hàm số đại số và hàm số siêu việt:

a) Hàm số đại số (hàm số tường) là hàm số mà khi tìm giá trị của nó ta chỉ cần thực hiện một số hữu hạn các phép tính đại số (cộng, trừ, nhân, chia và lũy thừa với số mũ hữu tỷ) với đối số của nó, chẳng hạn $y = \frac{\sqrt[3]{x^2+2x-1}}{x^2+2}$.

Trong lớp hàm số đại số thì hàm số dạng đơn giản nhất là dạng đa thức:

$y = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ($a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, n; a_n \neq 0$) là đa thức bậc n .

Hàm số có dạng tỷ số của hai đa thức gọi là hàm số hữu tỷ: $y = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}$

trong đó $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, n; b_j \in \mathbb{R}, j = 0, 1, \dots, m$ không đồng thời bằng "0".

Hàm số đại số không phải hàm số hữu tỷ gọi là hàm số vô tỷ.

b) Hàm số không phải đại số gọi là hàm số siêu việt, chẳng hạn:

$y = \sin x + x^2 - 3x$; $y = x \cdot 2^x$; $y = \arctan \frac{x}{1+x^2}$; ... là các hàm số siêu việt.

II. Giới hạn và liên tục

2.1. Giới hạn của hàm số một biến số

2.1.1 Các định nghĩa

Định nghĩa 2.1.1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng (a, b) hoặc $(a, b) \setminus \{x_0\}, x_0 \in (a, b)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là L (hữu hạn) khi x dẫn tới x_0 nếu bất kỳ dãy số $\{x_n\} \subset (a, b) \setminus \{x_0\}$ mà $x_n \rightarrow x_0$ khi $n \rightarrow \infty \Rightarrow f(x_n) \rightarrow L$. Ký hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

Định nghĩa 2.1.2. Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng (a, b) hoặc $(a, b) \setminus \{x_0\}, x_0 \in (a, b)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là L (hữu hạn) khi $x \rightarrow x_0$ nếu bất kỳ $\varepsilon > 0$ cho trước đều tìm được số $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Ký hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

Tương tự ta cũng có định nghĩa cho giới hạn của hàm số $f(x) \rightarrow \infty$, khi $x \rightarrow \infty$.

Định nghĩa 2.1.3.

1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0$ sao cho $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$.

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \text{ (hữu hạn)}, \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 \text{ sao cho } |x| > A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists A > 0 \text{ sao cho } |x| > A \Rightarrow |f(x) - L| > M.$$

Chú ý: Để chứng minh hàm số tồn tại giới hạn ta sẽ sử dụng Định nghĩa 2.1.2, còn Định nghĩa 2.1.1 thuận lợi khi chứng minh hàm số không tồn tại giới hạn.

Ví dụ 1. Chứng tỏ rằng $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ không tồn tại.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng $\lim_{x \rightarrow 4} (2x - 5) = 3$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng: $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 3x + 1) = 6$.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty, (a > 1)$.

2.1.2. Tính chất, phép toán và tiêu chuẩn hàm số tồn tại giới hạn

2.1.2.1. Tính chất

a) Nếu hàm $f(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow x_0$ thì giới hạn đó là duy nhất.

b) $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$ (C -const).

c) Nếu $f(x) \leq g(x) \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ thì $a \leq b$

2.1.2.2. Một số phép toán về giới hạn

Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ thì:

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C \cdot a, (C - \text{const})$.

b) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \pm b$.

c) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \cdot b$.

d) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{a}{b}, (b \neq 0)$.

(Dựa vào định nghĩa dễ dàng chứng minh được các phép toán trên).

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ trong phép toán b) ta gặp dạng bất định $\infty - \infty$, trong phép

toán c) gặp dạng $0 \cdot \infty$, trong phép toán d) gặp dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$.

Khi tìm giới hạn, gặp dạng bất định trên, tùy từng bài toán cụ thể mà ta tìm cách để khử các dạng bất định đó.

Ví dụ 5. Tìm $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^5 - x^2 + 7}{3x^4 + x^2 + 1}$.

Ví dụ 6. Tìm $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6}$.

Ví dụ 7. Tìm $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right)$.

Ví dụ 8. (2022N1) Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{x-2} - \frac{1}{\ln(x-1)} \right)$.

Ví dụ 9. (2020N1) Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{2^x - x^2}$.

2.1.2.3. Tiêu chuẩn tồn tại giới hạn

Tiêu chuẩn 1: Giả sử ba hàm số $f(x), g(x), h(x)$ thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} a) f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in (a, b), \\ b) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L.$$

Tiêu chuẩn 2: Nếu hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbf{R}$, là hàm số tăng bị chặn trên bởi số M , nghĩa là $f(x) \leq M \quad \forall x \in \mathbf{R}$ (hoặc $f(x)$ là hàm số giảm và bị chặn dưới bởi số m , nghĩa là $f(x) \geq m \quad \forall x \in \mathbf{R}$) thì hàm số $f(x)$ tồn tại giới hạn và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \leq M$ (hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \geq m$).

Nhờ các tiêu chuẩn này mà ta chứng minh được các công thức quan trọng về giới hạn (ở đây không chứng minh)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad (1)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2,71828..., \quad (2)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad (3)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad (4)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1, \quad (5)$$

$$\bullet \lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e. \quad (6)$$

Ví dụ 10. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x+1}{x}\right]^{7x}.$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2^x)^{1/x}.$ (2020N1)

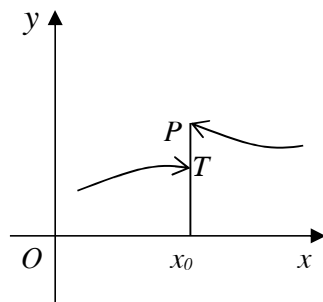
2.1.3. Giới hạn một phía

Định nghĩa 2.1.4. Cho hàm số $f(x)$ xác định trong (a, b) hoặc $(a, b) \setminus \{x_0\}, x_0 \in (a, b)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn phải tại điểm x_0 là P khi $x \rightarrow x_0, (x > x_0)$ nếu với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho $0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - P| < \varepsilon$.

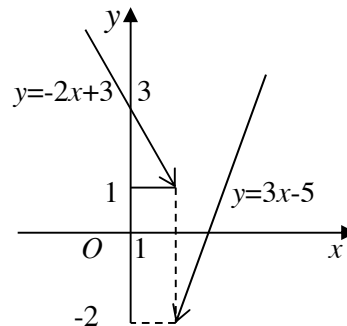
Ký hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0) = P$ (giới hạn phải).

Tương tự, ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn trái tại điểm x_0 là T khi $x \rightarrow x_0, (x < x_0)$ nếu với $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho $0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - T| < \varepsilon$.

Ký hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0) = T$ (giới hạn trái) (Hình 2.1).



Hình 2.1



Hình 2.2

Ví dụ 11. Tìm giới hạn một phía của hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{nếu } x \leq 1 \\ 3x - 5 & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$ khi $x \rightarrow 1$.

Ví dụ 12. Tìm giới hạn một phía của hàm $f(x) = \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$ khi $x \rightarrow 0$.

2.1.4. Vô cùng bé, vô cùng lớn**2.1.4.1. Vô cùng bé**

Định nghĩa 2.1.5. Đại lượng $\alpha(x)$ gọi là vô cùng bé (VCB) khi $x \rightarrow x_0$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ (x_0 có thể là hữu hạn hoặc $\pm \infty$).

Từ định nghĩa suy ra các tính chất sau:

- 1) Tổng đại số của một số hữu hạn các VCB trong cùng quá trình $x \rightarrow x_0$ là một VCB.
- 2) Tích của VCB với hàm số $f(x)$ bị chặn (nghĩa là $|f(x)| \leq M$) khi $x \rightarrow x_0$ là VCB.
- 3) Tích hữu hạn các VCB trong cùng một quá trình khi $x \rightarrow x_0$ là VCB.

Chú ý: Hằng số C dù bé bao nhiêu cũng vẫn là hằng số, không phải là VCB.

Ví dụ 13. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = (x-1)^2 \sin^3 \frac{1}{x-1}$ là VCB khi $x \rightarrow 1$

Khi xét nhiều VCB trong cùng một quá trình, VCB nào dẫn đến "không" nhanh hơn, chậm hơn ta có định nghĩa sau, gọi là bậc của các VCB.

Định nghĩa 2.1.6. Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB trong cùng quá trình $x \rightarrow x_0$. Xét tỷ số $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$,

- 1) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ thì $\alpha(x)$ là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$.
- 2) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$ thì $\alpha(x)$ là VCB bậc thấp hơn $\beta(x)$.
- 3) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0, A \neq \infty$ thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB cùng bậc.

Trong trường hợp khi $A = 1$ nghĩa là $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB tương đương khi $x \rightarrow x_0$, ký hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

4) Nếu tỷ số trên không tồn tại giới hạn thì ta nói hai VCB $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ không so sánh được với nhau.

Ví dụ 14. Hãy so sánh VCB $\varphi(x) = x$ khi $x \rightarrow 0$ với các VCB sau

$$f_1(x) = \tan x^3, f_2(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x}, f_3(x) = \sqrt{9+x} - 3 \text{ và } f_4(x) = \arctan x.$$

Từ khái niệm về VCB tương đương và các công thức giới hạn trong mục 2.1.3 ta có: nếu $\alpha(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$, thì $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$; $\tan \alpha(x) \sim \alpha(x)$; $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$; $\arctan \alpha(x) \sim \alpha(x)$. (7)

Ví dụ 15. (2020-2) So sánh hai vô cùng bé $\alpha(x) = \tan^2(3x)$, $\beta(x) = e^{9x^2} - 1$ khi $x \rightarrow 0$

Ví dụ 16. (2017-2) So sánh hai vô cùng bé $\alpha(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}$, $\beta(x) = \sqrt{1-x} - 1$ khi $x \rightarrow 0^+$

Ví dụ 17. (2020N1) So sánh hai vô cùng bé $\alpha(x) = \frac{x(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{2}$, $\beta(x) = \ln \frac{2x+1}{x+1}$ khi $x \rightarrow 0^+$

Ví dụ 18. (2020N1) So sánh hai vô cùng bé $\alpha(x) = \sin \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$, $\beta(x) = \frac{a}{x^2+1}$, ($a \in \mathbb{R}$) khi $x \rightarrow \infty$

2.1.4.2. Vô cùng lớn

Định nghĩa 2.1.7. Đại lượng $F(x)$ gọi là vô cùng lớn (VCL) khi $x \rightarrow x_0$, nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \infty$.

Từ định nghĩa về VCL, dễ dàng suy ra: Nếu $F(x)$ là VCL khi $x \rightarrow x_0$ thì $\frac{1}{F(x)}$ là VCB trong quá trình đó ($x \rightarrow 0$) và ngược lại. Vậy hoàn toàn như trên ta có thể suy ra các tính chất của VCL, chẳng hạn $F_1(x), F_2(x)$ là hai VCL trong cùng quá trình $x \rightarrow x_0$, nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F_1(x)}{F_2(x)} = 1$ thì $F_1(x) \sim F_2(x)$ khi $x \rightarrow x_0$.

Nhờ VCB và VCL tương đương ta có định lý về khử dạng bất định $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ khi tìm giới hạn.

Định lý 2.1.1. Giả sử $f(x), g(x), \bar{f}(x), \bar{g}(x)$ là những VCB (VCL) khi $x \rightarrow x_0$ và $f(x) \sim \bar{f}(x); g(x) \sim \bar{g}(x)$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)}$. (8)

Chứng minh: Xét $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\bar{f}(x)} \cdot \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)} \cdot \frac{\bar{g}(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\bar{f}(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\bar{g}(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)}$.

Hệ quả 1. Nếu $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ là các VCB trong cùng quá trình $x \rightarrow x_0$, $\alpha(x)$ là VCB có bậc thấp nhất so với $\beta(x)$ và $\gamma(x)$ thì $\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x) \sim \alpha(x)$. (9)

Công thức trên gọi là quy tắc ngắt bỏ VCB bậc cao trong một tổng các VCB.

Hệ quả 2. Nếu $f(x), g(x), h(x)$ là các VCL trong cùng quá trình $x \rightarrow x_0$ và nếu $f(x)$ là VCL bậc cao nhất thì $f(x) + g(x) + h(x) \sim f(x)$. (10)

Công thức trên gọi là quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp trong một tổng các VCL. áp dụng quy tắc trên ta có công thức sau khi $x \rightarrow 0$ và $p > 0$: $(1+x)^p - 1 \sim px$, (11)

Thật vậy, xét $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{px} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \dots}{px} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{p-1}{2}x + \dots\right) = 1$.

Ví dụ 19. Tìm $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}$.

Ví dụ 20. (2020N1) Tìm $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2 \arctan x)}{e^x - \cos x}$.

Ví dụ 21. Tìm $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \arcsin^2 x - \arctan^2 x}{3\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{\tan^2 x}}$.

Ví dụ 22. Tìm $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - \sqrt[3]{x+1}}{4x^3 + \sqrt[5]{x^7} - 2}$.

Ví dụ 23. (2017) Tìm $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln(1+2x)}{3x^2 - 4 \sin^{-1} x}$.

Ví dụ 24. (2022N1) Khi $x \rightarrow \infty$, hàm số $f(x) = x \sin x$ có bị chặn không? Có phải là vô cùng lớn không? Giải thích.

2.2. Tính liên tục và gián đoạn của hàm số

2.2.1. Khái niệm về sự liên tục và gián đoạn của hàm số

Định nghĩa 2.2.1. Hàm số $y = f(x)$ gọi là liên tục tại điểm x_0 , nếu

- 1) Hàm số đó xác định tại điểm x_0 và lân cận x_0 ,
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Chú ý rằng muốn có $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ thì phải có $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

Nếu hàm số $f(x)$:

- + liên tục tại mọi điểm của khoảng (a, b) thì ta nói hàm số liên tục trong khoảng (a, b) đó.
- + xác định tại a và $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$ thì ta nói hàm số liên tục bên phải của điểm $x = a$.
- + xác định tại b và $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b)$ thì ta nói hàm số liên tục bên trái của điểm $x = b$.

Nếu hàm số liên tục tại mọi điểm trong (a, b) và liên tục bên phải của điểm a , liên tục bên trái của điểm b thì ta nói hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$.

Về mặt hình học: nếu hàm số $f(x)$ liên tục trong (a, b) thì trong khoảng đó đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường cong liên.

Định nghĩa 2.2.2. Hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm x_0 (hữu hạn) thì điểm x_0 gọi là điểm gián đoạn của hàm số.

Nếu x_0 là điểm gián đoạn mà tại điểm đó có $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0); \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$ hữu hạn thì điểm x_0 gọi là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số $f(x)$ và $|f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)| = \lambda$ gọi là bước nhảy của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 .

Trường hợp $\lambda = 0$, nghĩa là $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$ thì điểm x_0 gọi là điểm gián đoạn bỏ được.

Các điểm gián đoạn khác gọi là điểm gián đoạn loại 2, nghĩa là tại điểm x_0 hoặc $f(x_0 + 0)$, hoặc $f(x_0 - 0)$ không tồn tại hoặc có giới hạn là vô hạn.

Ví dụ 1. Xét sự liên tục hay gián đoạn của các hàm số :

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \quad \text{tại điểm } x = 0.$$

$$b) f(x) = \frac{x^3+1}{x+1} \quad \text{tại điểm } x = -1.$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+2x^2)}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \quad (2017N1)$$

$$d) f(x) = \arctan \frac{1}{x+1} \quad (2020N2)$$

Ví dụ 2. (2019N2) Với n bằng bao nhiêu thì hàm số sau liên tục tại $x=0$: $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan(2x)}{x^n} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

Ví dụ 3. (2022N1) Tìm a để hàm số sau liên tục tại $x = 0$: $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(3x)}{\ln(1+x^2)} & \text{khi } x \neq 0 \\ a-1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

2.2.2. Phép toán về hàm số liên tục, sự liên tục của hàm hợp

Định lý 2.2.1. Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm $x_0 \in (a, b)$ thì

$$1) f(x) \pm g(x); \quad 2) g(x) \cdot f(x); \quad 3) \frac{f(x)}{g(x)}, \quad (g(x_0) \neq 0).$$

là những hàm số liên tục tại điểm x_0 .

Định lý 2.2.2. Nếu hàm số $u = \varphi(x)$ liên tục tại điểm x_0 , còn hàm $y = f(u)$ liên tục tại điểm $u_0 = \varphi(x_0)$, thì hàm hợp $y = f[\varphi(x)]$ liên tục tại điểm x_0 .

Các định lý 2.2.1 và 2.2.2 có thể chứng minh được bằng cách sử dụng định nghĩa về hàm số liên tục tại điểm $x_0 \in (a, b)$.

Từ định lý trên dễ dàng suy ra: nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0 thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f \left[\lim_{x \rightarrow x_0} x \right] \quad (13)$$

$$\text{và} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f[\phi(x)] = f \left[\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) \right] \quad (14)$$

2.2.3. Áp dụng tính chất hàm số liên tục để khử các dạng bất định $\frac{0}{0}, 1^\infty$

$$\text{Nếu } \alpha \text{ là VCB } (\alpha \rightarrow 0) \text{ thì } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \log_a e, \quad (a > 0, a \neq 1). \quad (15)$$

$$\text{Đặc biệt } a = e \text{ thì } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1, \quad (16)$$

$$\text{Hay } \ln(1 + \alpha) \sim \alpha \text{ khi } \alpha \rightarrow 0. \quad (17)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \ln a \quad (a > 0, a \neq 1),. \quad (18)$$

$$\text{Khi } a = e \text{ thì } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} = 1, \quad (19)$$

$$\text{hay } e^\alpha - 1 \sim \alpha \text{ khi } \alpha \rightarrow 0. \quad (20)$$

Để chứng minh các công thức trên (chẳng hạn công thức (15)) ta sử dụng tính chất liên tục của hàm logarit. Do $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ (công thức (6) mục 2.1.2) và do hàm logarit là hàm số liên

tục nên $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \log_a(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \log_a \left[\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right] = \log_a e$, là điều phải chứng minh.

Để chứng minh công thức (18), chỉ cần đặt $a^\alpha - 1 = \beta$ sẽ dẫn đến dạng công thức (15).

Trong quá trình tìm giới hạn ta còn gặp biểu thức dạng

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) \ln u(x)}, \quad (21)$$

Vì $u^v = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u}$, vậy trong công thức (21):

- Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = a; \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = b, b > 0, a, b$ hữu hạn,
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = e^{a \ln b} = e^{\ln b^a} = b^a$.
- Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 1$, thì $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)}$ có dạng 1^∞ .
- Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$, thì $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)}$ có dạng 0^0 .
- Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = 0$, có dạng ∞^0 .

Các dạng $1^\infty, 0^0, \infty^0$ đều là những dạng bất định, vì $v(x) \ln u(x)$ đều có dạng bất định $0 \cdot \infty$.

Trường hợp $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)}$ có dạng 1^∞ , có thể thay công thức (21) bởi công thức sau:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} v(x)[u(x)-1]} \quad (22)$$

Thực vậy, do $u^v = e^{v \ln u} = e^{v \ln[(u-1)+1]}$, mà $u(x) \rightarrow 1$ khi $x \rightarrow x_0 \Rightarrow u(x) - 1$ VCB khi $x \rightarrow x_0$ nên theo công thức (17) ta có

$$\ln[(u(x) - 1) + 1] \sim u(x) - 1. \text{ Vậy } \lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) \ln[(u(x)-1)+1]} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} v(x)[u(x)-1]}.$$

Ví dụ 4. Tìm $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt[3]{x} \ln(1+3x)}{(\arctan \sqrt{x})^2 \cdot [e^{5\sqrt[3]{x}} - 1]}$.

Ví dụ 5. Tìm $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1+\tan x}{1+\sin x} \right]^{\frac{1}{\sin x}}$.

Ví dụ 6. a) (2021N1) Tìm $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + 2\sin x]^{\frac{1}{\sqrt{1+2x}-1}}$. b) (2020N1) Tìm $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x + 2^x]^{\frac{1}{x}}$.

Ví dụ 7. (2019N1) Tìm các giới hạn sau: a) $I = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}}$ b) $I = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^x - 1}{x} \right]^{\frac{1}{x}}$.

2.2.4. Các tính chất của hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$ và sự liên tục của hàm ngược

2.2.4.1. Hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ có tính chất sau:

- 1) $f(x)$ là hàm số giới nội trên $[a, b]$.
- 2) Hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất trên $[a, b]$.
- 3) Nếu $m = \min f(x); M = \max f(x)$ khi $a \leq x \leq b$ và với bất kỳ A sao cho $m \leq A \leq M$ thì tồn tại $x_0 \in [a, b] : f(x_0) = A$.

Trong trường hợp riêng $f(a) f(b) < 0$ thì tìm được điểm $c \in (a, b)$ để $f(c) = 0$.

2.2.4.2. Sự liên tục của hàm ngược

Định lý 2.2.3. Nếu hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục và đơn điệu ngặt trong khoảng (a, b) thì hàm số đó tồn tại hàm ngược $x = f^{-1}(y)$ cũng xác định liên tục và đơn điệu ngặt trong khoảng biến đổi của hàm số $y = f(x)$.

Ví dụ 8. (2022N1) Cho hàm số $f: [1, 3] \rightarrow [1, 3]$ liên tục. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in [1, 3]$ sao cho $f(x_0) = x_0$.

Ví dụ 9. Tìm các giới hạn: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$.

Ví dụ 10. Tìm các giới hạn sau

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - 1}{x}$.
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

Ví dụ 11. Tìm $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$.

Ví dụ 12. Hãy chỉ ra sai sót trong cách tìm $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x) - \sin(\sin x)}{\tan x - \sin x}$.

Ví dụ 13. Xét sự liên tục và gián đoạn của hàm số $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{khi } x \geq 2 \\ 2x-1 & \text{khi } 1 < x < 2 \\ x-1 & \text{khi } x \leq 1. \end{cases}$

Ví dụ 14. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-a^2}{x-a} & \text{khi } x \neq a, \\ 0 & \text{khi } x = a, \end{cases}$ liên tục tại $x = a$.

Ví dụ 15. (2019N1) Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} (e^{2x^2} - 1)x^{-2} & \text{khi } x \neq 0, \\ a & \text{khi } x = 0, \end{cases}$

Ví dụ 16. Chứng minh rằng mỗi phương trình đa thức bậc lẻ có ít nhất một nghiệm thực.

III. Đạo hàm - Vi phân

3.1. Đạo hàm

3.1.1. Định nghĩa và ý nghĩa của đạo hàm

Định nghĩa 3.1.1. Cho hàm số $y = f(x)$, xác định trong khoảng (a, b) . Điểm $x_0 \in (a, b)$, cho x_0 một số gia Δx (Δx có thể dương hoặc âm), sao cho $x_0 + \Delta x \in (a, b)$ thì hàm số $y = f(x)$ có số gia tương ứng $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Nếu $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ có giới hạn hữu hạn thì giới hạn đó gọi là đạo hàm của hàm

số $y = f(x)$ tại điểm x_0 và ký hiệu là $y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. (1)

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a, b)$ thì ta nói hàm số đó có đạo hàm trong khoảng (a, b) .

Nói chung nếu hàm số có đạo hàm trong khoảng (a, b) , thì với mỗi $x \in (a, b)$ có $f'(x)$ khác nhau, nên có thể xem $y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ là hàm số của x trong khoảng đó.

ý nghĩa vật lý: Vận tốc tức thời $V(t)$ tại thời điểm t là đạo hàm của chuyển động thẳng không đều có phương trình $s = s(t)$ và $V(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$.

ý nghĩa hình học: Đường cong có phương trình $y = f(x)$ thì hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong tại điểm x bằng đạo hàm tại điểm đó $k = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Các ý nghĩa này đã học từ giáo trình phổ thông.

Ví dụ 1. Cho $y = e^x$, tính y' .

Giải: Xét tại điểm x bất kỳ, cho x số gia Δx thì số gia hàm số

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x (e^{\Delta x} - 1),$$

do $e^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x$ khi $\Delta x \rightarrow 0$ (theo công thức (20) Chương 2), nên

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x} = e^x. \text{ Vậy } y = e^x \Rightarrow y' = e^x. \quad (2)$$

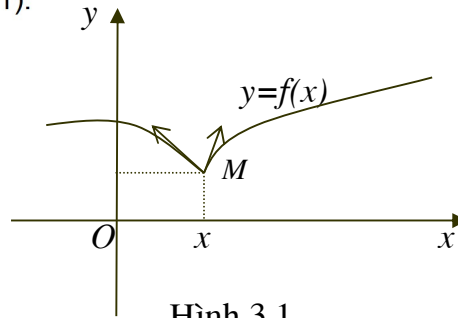
3.1.2. Đạo hàm một phía, đạo hàm bằng vô cùng

3.1.2.1. Đạo hàm một phía (liên hệ với giới hạn một phía)

Nếu $\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ (giới hạn bên trái $\Delta x < 0$), $\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ (giới hạn bên phải $\Delta x > 0$), tương ứng tồn tại hữu hạn thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm bên trái, bên phải của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x và ký hiệu là

$$f'(x-0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad f'(x+0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Rõ ràng nếu $f'(x-0) = f'(x+0)$ thì $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ tồn tại và chính là đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x . Ngược lại, nếu $f'(x-0) \neq f'(x+0)$ thì hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại điểm x . Trong trường hợp này đường cong $y = f(x)$ tại điểm x có điểm góc (tiếp tuyến trái, phải của điểm x không trùng nhau) (Hình 3.1).



Hình 3.1

Từ khái niệm đạo hàm một phía: nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x thì hàm số liên tục tại điểm đó, ngược lại hàm số liên tục tại điểm x thì chưa chắc hàm số có đạo hàm (Hình 3.1).

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trong khoảng (a,b) và có đạo hàm bên phải tại điểm $x = a$ và có đạo hàm bên trái tại điểm $x = b$ thì ta nói hàm số đã cho có đạo hàm trên đoạn $[a,b]$.

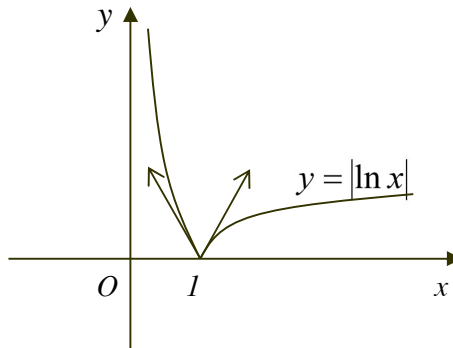
3.1.2.2. Đạo hàm vô cùng

Người ta cũng mở rộng khái niệm đạo hàm cho trường hợp $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \infty$, khi đó ta nói hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm vô cùng tại điểm x .

Về mặt hình học: nếu $f'(x) = \infty$ tại điểm x (hữu hạn) thì tại điểm x đó đường cong $y = f(x)$ có tiếp tuyến vuông góc với trục Ox .

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = |\ln x|$ tại điểm $x = 1$.

Các đạo hàm một phía khác nhau, nên hàm số $y = |\ln x|$ không tồn tại đạo hàm tại điểm $x = 1$ (Hình 3.2)



Hình 3.2

Ví dụ 3. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x-1}$, tại điểm $x = 1$.

3.1.3. Một số định lý về phép toán của đạo hàm

Định lý 3.1.1. Giả sử các hàm số $u(x), v(x), w(x)$ cùng có đạo hàm trong khoảng (a,b) và nếu:

- 1) $y = u + v - w \Rightarrow y' = [u + v - w]' = u' + v' - w'$.
- 2) $y = u \cdot v \Rightarrow y' = (u \cdot v)' = u'v + uv'$.
- 3) $y = \frac{u}{v} (v \neq 0)$ thì $y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - v'u}{v^2}$.

Định lý 3.1.2. (Đạo hàm hàm hợp) Cho các hàm số $y = f(u)$ và $u = \phi(x)$. Nếu hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm đối với u , còn hàm số $u = \phi(x)$ có đạo hàm đối với x thì

$$y'_x = [f(\phi(x))]' = y'_u \cdot u'_x. \quad (3)$$

Định lý 3.1.3. (Đạo hàm hàm số ngược) Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) \neq 0$ tại điểm x và tồn tại hàm ngược $x = f^{-1}(y) = \varphi(y)$, liên tục tại điểm y tương ứng thì tại điểm đó hàm số $x = \varphi(y)$ có đạo hàm theo y và $(y) = \frac{1}{f'(x)}$, hay $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$. (4)

Ví dụ 3. Cho $y = a^x$, ($a > 0, a \neq 1$). Tính y' .

$$y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a. \quad (5)$$

Ví dụ 4. Cho $y = \ln x$, ($x > 0$). Tính y' .

$$\text{Vậy } y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \quad (6)$$

$$\text{Xét trường hợp } y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x \ln a}. \quad (7)$$

Ví dụ 5. Cho $y = \arcsin x$, $-1 < x < 1$. Tính y' .

$$\text{Vậy } y = \arcsin x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1. \quad (8)$$

Hoàn toàn tương tự, ta có

$$y = \arccos x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1. \quad (9)$$

$$y = \arctan x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < +\infty. \quad (10)$$

$$y = \text{arccot} x \Rightarrow y' = \frac{-1}{1+x^2}, -\infty < x < +\infty. \quad (11)$$

Ví dụ 6. Cho $y = \ln\{\tan[\cos(x-3)]\}$. Tính y' .

Ví dụ 7. Cho $y = u(x)^{v(x)} \Rightarrow y' = ?$, trong đó $u(x)$ và $v(x)$ là những hàm số có đạo hàm trong (a, b) ; $u(x) > 0, u(x) \neq 1, \forall x \in (a, b)$.

$$\text{Giải: } y = u(x)^{v(x)} \Rightarrow \frac{1}{y} y' = v' \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{v' u \ln u + v u'}{u} \Rightarrow y' = y \left[\frac{v' u \ln u + v u'}{u} \right].$$

Như vậy, để tính đạo hàm của hàm số dạng $y = u(x)^{v(x)}$ ta tiến hành:

1) Logarit hai vế theo cơ số e .

2) Đạo hàm hai vế của đẳng thức và tính theo công thức đạo hàm của hàm số hợp, suy ra kết quả.

Phương pháp trên cũng áp dụng được đối với hàm số là tích của nhiều biểu thức.

Ví dụ 8. Cho $y = (x^2 + 1)^{x^3}$, tính y' .

Ví dụ 9. Cho $y = \frac{(x^2+1)^{5/3} \cdot \sqrt{x^2-1}}{\sqrt[5]{x^4(x^2+x+1)^3}}$, tính y'

3.1.4. Bảng công thức đạo hàm đáng nhớ

Tất cả các công thức đã có từ chương trình phổ thông và các công thức tìm được trong mục 3.1 sắp xếp lại ta được bảng công thức đạo hàm sau

1) Các phép tính của đạo hàm:

- $[u(x) + v(x) - w(x)]' = u'(x) + v'(x) - w'(x).$
- $[u(x) \cdot v(x)]' = u'v + uv'.$
- $[c \cdot v(x)]' = c \cdot v', (c = \text{const}).$
- $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{vu' - v'u}{v^2}, (v \neq 0).$
- $y = f(u), u = \varphi(x) \Rightarrow y' = y'_u \cdot u'_x.$
- $y = f(x)$ và $x = \varphi(y)$ hai hàm số ngược nhau: $y'_x = \frac{1}{x'_y}; x'_y = \frac{1}{y'_x}$ hay $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$

2) Một số công thức đạo hàm:

- $y = C, (C = \text{const}), \Rightarrow y' = C' = 0.$
- $y = x^a, x > 0, a \in \mathbf{R} \Rightarrow (x^a)' = a x^{a-1}.$
- $y = a^x, a > 0, a \neq 1 \Rightarrow (a^x)' = a^x \ln a.$

- $y = e^x, \Rightarrow (e^x)' = e^x.$
- $y = \ln x, x > 0 \Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}.$
- $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1, x > 0 \Rightarrow (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$
- $y = \sin x \Rightarrow (\sin x)' = \cos x.$
- $y = \cos x \Rightarrow (\cos x)' = -\sin x.$
- $y = \tan x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$
- $y = \cot x, x \neq k\pi \Rightarrow (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$
- $y = \arcsin x, |x| < 1 \Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
- $y = \arccos x, |x| < 1 \Rightarrow (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$
- $y = \arctan x \Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$
- $y = \operatorname{arccot} x \Rightarrow (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

3.1.5. Đạo hàm cấp cao

Định nghĩa 3.1.2. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x)$. Ta gọi $f'(x)$ là đạo hàm cấp một của hàm số $f(x)$.

$f'(x)$ nói chung cũng là hàm số của x , vì vậy nếu $f'(x)$ có đạo hàm ta có thể lấy đạo hàm lần nữa (nghĩa là đạo hàm của đạo hàm cấp một) gọi là đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x)$, ký hiệu: $[f'(x)]' = f''(x) = y''$.

Tương tự đạo hàm của đạo hàm cấp hai gọi là đạo hàm cấp ba, ký hiệu $y''' = [f''(x)]' = f'''(x), \dots$

Đạo hàm của đạo hàm cấp $n-1$ của hàm số $y = f(x)$ gọi là đạo hàm cấp n ,

Ký hiệu $y^{(n)} = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' = f^{(n)}(x), n = 4, 5, \dots$

Công thức Lepnit (Leibnitz): Giả sử các hàm số $u(x)$ và $v(x)$ có đạo hàm đến cấp n , nếu

$$y = u + v \Rightarrow y^{(n)} = (u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}. \quad (13)$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y^{(n)} = (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}, \quad (14)$$

trong đó: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, k = 0, 1, \dots, n, 0! = 1; 1! = 1; u^{(0)} = u; v^{(0)} = v.$

Ví dụ 10. Cho $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbf{R}$. Tính $y^{(n)}$.

Giải: Ta có

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}; y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}; \dots; y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-(n+1))x^{\alpha-n}$$

Đặc biệt khi $\alpha = n \in \mathbf{N}^+$ thì $y^{(n)} = n(n-1)(n-2) \dots 2.1 = n!$.

Nếu $y = x^n$ thì $y^m = 0, \forall m > n$.

Ví dụ 11. Cho $y = \ln(x+3)$. Tính $y^{(n)}$.

Ví dụ 12. Cho $y = \sin x$. Tính $y^{(n)}$.

Ví dụ 13. Cho $y = \sin 5x \cos 2x$. Tính $y^{(n)}$.

Ví dụ 14. Cho $y = (x^2 + 2)e^x$. Tính $y^{(n)}$.

3.2. Vi phân

Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm x và lân cận của nó. Cho x số gia Δx thì số gia của hàm số là

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \quad (15)$$

Rõ ràng rằng khi $\Delta x \rightarrow 0$ thì $\Delta y \rightarrow 0$. Vấn đề đặt ra, hãy tìm cách biểu diễn Δy dưới dạng đơn giản

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x. \quad (16)$$

trong đó A là hằng số không phụ thuộc vào Δx . Đại lượng $A \cdot \Delta x$ tỷ lệ bậc nhất đối với Δx , còn $\alpha \cdot \Delta x$ là VCB bậc cao hơn so với Δx khi $\Delta x \rightarrow 0$. Như vậy $\Delta x \rightarrow 0$ thì $\alpha \rightarrow 0$.

3.2.1. Định nghĩa vi phân

Định nghĩa 3.2.1. Cho hàm số $y = f(x)$. Nếu số gia Δy biểu diễn được dưới dạng (16) thì ta nói hàm số $f(x)$ khả vi tại điểm x và biểu thức $A \cdot \Delta x$ gọi là vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x , ký hiệu là $dy = df(x) = A \cdot \Delta x$. (17)

Nếu $A \neq 0$, Δx khá bé thì số hạng thứ hai của (16) sẽ không đáng kể so với số hạng đầu, nên $\Delta y \approx A \cdot \Delta x$ và gọi nó là phần chính bậc nhất của số gia Δy .

Vậy với $A \neq 0$ thì vi phân là phần chính bậc nhất của số gia của hàm số.

Từ định nghĩa về hàm số khả vi và định nghĩa đạo hàm của hàm số, dễ dàng suy ra, nếu hàm số $f(x)$ khả vi tại điểm x thì hàm số đó có đạo hàm tại điểm x và ngược lại, đồng thời $A = f'(x)$.

Từ đó theo công thức (17) ta có $dy = df = f'(x) \cdot \Delta x$. (18)

Trong trường hợp $x = y$ thì $y' = 1$ và $\Delta y = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, $dy = dx \Rightarrow \Delta x = dx$.

Vậy từ (18), ta có $dy = df = f'(x) dx$, (19)

$$\text{hay } y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}. \quad (20)$$

Ví dụ 1. Tính dy , nếu $y = \sqrt{1 + \ln x}$.

Công thức (19) là công thức tính vi phân tại điểm x bất kỳ, vậy tại điểm $x = x_0$ cụ thể ta được vi phân tại điểm x_0 : $df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot dx$.

Trong thí dụ trên ta có $df(2) = \frac{1}{4\sqrt{1+\ln 2}} dx$.

Ví dụ 2. (2019-2) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arccot} \frac{1}{|x|} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ Xét tính khả vi của hàm số tại $x = 0$.

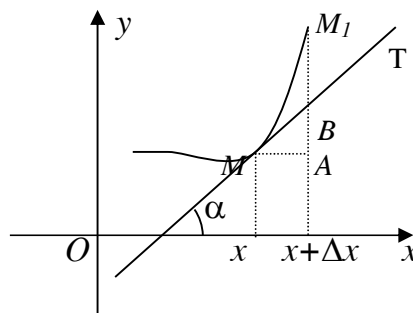
Ví dụ 3. (2020-2) Chứng minh rằng với $\forall x > 1$ ta có $\ln x + \operatorname{arccot} x^2 > \frac{\pi}{4}$.

Ví dụ 4. (2022N1) Với giá trị nguyên nào của a để hàm số sau khả vi $f(x) = \begin{cases} x^a e^{-x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

Ví dụ 5. (2018N1) Tìm $f(x)$ biết $\frac{d}{dx}(f(2025x)) = x^2$ và $f(0) = 0$.

3.2.2. Ý nghĩa hình học của vi phân

Vẽ đường cong $y = f(x)$. Lấy trên đường cong điểm $M(x, y)$, kẻ tiếp tuyến với đường cong tại M . Cho x số gia Δx , khi đó tung độ y của đường cong có số gia tương ứng $\Delta y = AM_1$ và tung độ trên tiếp tuyến MT có số gia tương ứng là đoạn AB . Trong tam giác vuông AMB ta có $AB = MA \tan \alpha = \Delta x \cdot f'(x) = dy$



Hình 3.4

Về mặt hình học, vi phân của hàm số tại một điểm đúng bằng số gia của tung độ tiếp tuyến với đường cong tại điểm đó, còn việc thay Δy bởi dy có nghĩa là thay đoạn đường cong bởi đoạn tương ứng trên tiếp tuyến.

Từ công thức (19) ta suy ra vi phân của hàm số tại điểm x đúng bằng đạo hàm của hàm số đó tại điểm x tương ứng nhân với vi phân của đối số.

(Chú ý rằng $dx = \Delta x$ nên dx là số). Vì vậy các công thức tính đạo hàm cũng áp dụng được cho công thức tính vi phân.

Chẳng hạn $y = uv \Rightarrow dy = (uv)'dx = u(v'dx) + v(u'dx) = u dv + v du, \dots$

3.2.3. Ứng dụng vi phân để tính gần đúng

Giả sử $y = f(x)$ là hàm số khả vi tại x thì $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$. (21)

Khi Δx khá bé thì $\alpha \cdot \Delta x$ là VCB bậc cao hơn so với Δx , nên trong (21) bỏ qua đại lượng α . Δx ta được $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x = dy \Rightarrow f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$. (22)

Công thức (22) gọi là công thức tính gần đúng bằng vi phân và nó chỉ có nghĩa khi Δx bé (càng bé độ chính xác càng cao).

Ví dụ 6. (2018-2) Tính gần đúng nhờ vi phân $A = \sqrt[3]{27,03}$.

Ví dụ 7. Một hình cầu bằng kim loại có bán kính $R = 5\text{cm}$. Khi đốt nóng thì bán kính tăng thêm một lượng $\Delta R = 0,1\text{cm}$. Hỏi thể tích đúng và gần đúng của hình cầu sau khi đã được đốt nóng.

3.2.4. Vi phân cấp cao

Định nghĩa 3.2.2. Vi phân dy của hàm số $y = f(x)$ là $dy = f'(x) dx$, nói chung là hàm số của biến số x và gọi là vi phân cấp 1.

Vi phân của vi phân cấp 1 gọi là vi phân cấp hai, ký hiệu $d(dy) = d^2y$ và

$$d^2y = d[dd^2y] = d[f'(x)dx] = f''(x) \cdot dx^2. \quad (23)$$

Tương tự vi phân của vi phân cấp $n-1$ gọi là vi phân cấp n và

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x) \cdot dx^n \quad (24)$$

Chú ý: Nếu $y = f(u)$, $u = \varphi(x) \Rightarrow dy = f'_u \cdot u'_x dx = f'_u \cdot du$.

Còn $d^2y = d[f'_u \cdot du] = f''_{uu} \cdot du^2 + f'_u \cdot d^2u$, nghĩa là vi phân cấp cao của hàm hợp **dạng** đã thay đổi.

3.3. Định lý về hàm số khả vi và ứng dụng

3.3.1. Một số định lý về hàm số khả vi

Định lý Lagrange. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a, b]$, có đạo hàm hữu hạn $\forall x \in (a, b)$ thì trong khoảng (a, b) đó có ít nhất một điểm c : $a < c < b$ sao cho

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \quad (25)$$

$$\text{hay} \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Định lý này công nhận, ở đây chỉ nêu lên ý nghĩa hình học của định lý.

Ta đã biết $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ là hệ góc của dây cung AB ; còn $f'(c)$ là hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại điểm $x = c$. Vì vậy ý nghĩa hình học của định lý Lagrange là: nếu cung cong AB liên tục và mọi điểm đều có tiếp tuyến thì trên cung ấy có ít nhất một điểm C có hoành độ $x = c$ ($a < c < b$) tại đó có tiếp tuyến song song với dây cung AB .

Dạng khác của công thức Lagrange (25):

Do $c \in (a, b)$ nên $0 < \frac{c-a}{b-a} < 1$. Đặt $\frac{c-a}{b-a} = \theta$, ($0 < \theta < 1$) $\Rightarrow c = a + \theta(b - a)$, khi đó công thức Lagrange (25) có thể viết lại dưới dạng

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a)) \cdot (b - a). \quad (26)$$

Định lý Rolle. (Hệ quả định lý Lagrange) Với các giả thiết của định lý Lagrange, và nếu $f(a) = f(b)$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ để $f'(c) = 0$. (29)

Định lý Cauchy. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cùng liên tục trên $[a, b]$, khả vi trong (a, b) đồng thời $g'(x)$ không triệt tiêu trong khoảng đó và $g(b) \neq g(a)$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (30)$$

Từ định lý Cauchy, ta thấy công thức trong định lý Lagrange là trường hợp riêng của định lý Cauchy vì trong (30) chỉ cần chọn $g(x) = x$ ta được công thức (25).

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Hỏi hàm số đã cho trên $[-1; 1]$ có thỏa mãn định lý Rolle không?

Ví dụ 2. Chứng minh rằng phương trình $3x^5 + 15x - 8 = 0$, chỉ có một nghiệm thực duy nhất.

Ví dụ 3. Tìm điểm trên đường cong $y = x^3$, mà tại đó có tiếp tuyến song song với dây cung đi qua $A(-1; -1)$ và $B(2; 8)$.

Ví dụ 4. (2022N1) Cho $f(x)$ hàm số liên tục trên $[0; 1]$, khả vi trên $(0, 1)$ và $f(0) = f(1) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại hằng số $c \in (0, 1)$ sao cho $f(c) + f'(c) = 0$.

Ví dụ 5. (2019N1) Có áp dụng được định lý Fermat cho hàm số $y = f(x) = |x - 1|$ trên $[0; 2]$? Tìm cực trị hàm số này.

Ví dụ 6. (2019N1) Cho $a - b + c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $4ax^3 - 3bx^2 + c = 0$ luôn có nghiệm thuộc $(0, 1)$.

Ví dụ 7. (2019N1) Chứng minh rằng: $6 \arctan x + 5 \arctan(x + 2) < 11 \arctan(x + 1), \forall x > 0$ (1)

3.3.2. Quy tắc L'Hospital để khử dạng bất định $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

Quy tắc L'Hospital:

- 1) Nếu các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định tại lân cận điểm x_0 ,
- 2) Có đạo hàm $f'(x), g'(x)$ ở lân cận của điểm x_0 và $g'(x) \neq 0$, khi $x \neq x_0$,
- 3) $f(x_0) = g(x_0) = 0$,

khi đó nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (A hữu hạn hoặc ∞) thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Chú ý 1. Khi $x \rightarrow \infty$, quy tắc L'Hospital cũng đúng:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (31)$$

Chú ý 2. Nếu $f'(x) = g'(x) = 0$ và các hàm số $f'(x), g'(x)$ thỏa mãn các điều kiện của quy tắc L'Hospital thì có thể áp dụng lần nữa đối với $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, nghĩa là sau một lần áp dụng quy tắc L'Hospital, vẫn gặp dạng bất định $\frac{0}{0}$, thì có thể áp dụng tiếp đối với tỷ số mới đó.

Chú ý 3. Quy tắc L'Hospital chỉ là điều kiện đủ, nên nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ không tồn tại, thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ vẫn có thể tồn tại, trong trường hợp đó ta phải tìm cách khử dạng bất định $\frac{0}{0}$.

Chú ý 4. Trong trường hợp $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ có dạng $\frac{\infty}{\infty}$ thì quy tắc L'hospital vẫn đúng.

Ví dụ 8. Tìm các giới hạn sau:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ (dạng $\frac{0}{0}$).
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$ (dạng $\frac{0}{0}$).
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n}$ (dạng $\frac{\infty}{\infty}$).
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x}$ (dạng $\frac{\infty}{\infty}$).

Ví dụ 9. Tìm $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$, (dạng $\frac{0}{0}$).

Một số dạng bất định khác sau khi biến đổi có thể áp dụng quy tắc L'Hospital.

1) Dạng bất định $\infty - \infty$

Có thể quy đồng mẫu số hoặc nhân với biểu thức liên hợp để đưa về dạng bất định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$.

Ví dụ 10. Tìm: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right)$.

2) *Dạng bất định* $0 \cdot \infty$

Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \infty$, tính $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) \cdot v(x)$ (dạng $0 \cdot \infty$) ta biến đổi về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$ bằng cách viết $u(x) \cdot v(x) = \frac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}}$ hoặc $u(x) \cdot v(x) = \frac{v(x)}{\frac{1}{u(x)}}$ sau đó áp dụng quy tắc L'Hospital.

Ví dụ 11. Tìm các giới hạn sau:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^2 \ln x$, (dạng $0 \cdot \infty$).
- b) $\lim_{x \rightarrow 2} (4 - x^2) \tan \frac{\pi x}{4}$, (dạng $0 \cdot \infty$).
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left[\cos \frac{1}{x} \right]$, (dạng $0 \cdot \infty$).

3) *Dạng bất định* $1^\infty, \infty^0, 0^0$

Xét hàm số dạng $[u(x)]^{v(x)}$. Giả sử khi $x \rightarrow x_0$ ta có các trường hợp:

- a) $u(x) \rightarrow 1, v(x) \rightarrow \infty$ dạng vô định 1^∞ .
- b) $u(x) \rightarrow \infty, v(x) \rightarrow 0$ dạng vô định ∞^0 .
- c) $u(x) \rightarrow 0, v(x) \rightarrow 0$ dạng vô định 0^0 .

Để tính $\lim_{x \rightarrow x_0} [u(x)]^{v(x)}$ ta sử dụng các công thức: $\lim_{x \rightarrow x_0} [u(x)]^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) \cdot \ln u(x)}$.

Ví dụ 12. Tìm các giới hạn sau:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$, (dạng 1^∞).
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$, (dạng ∞^0).
- c) $\lim_{x \rightarrow 0+0} (\sin x)^{\tan x}$, (dạng 0^0).
- d) (2018-2) Tính $I = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} |\tan(2x)|^{\cos x}$.

3.3.3. Khai triển Taylor

Định lý 3.3.1. Cho hàm số $f(x)$ khả vi đến cấp $n + 1$ trong khoảng (a, b) . Khi đó với $x_0 \in (a, b)$ ta có công thức

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad (32)$$

trong đó $x \in (a, b)$, c là điểm trung gian giữa x_0 và x , ($c = x_0 + \theta(x - x_0)$; $0 < \theta < 1$).

Công thức (32) được gọi là công thức khai triển Taylor.

Biểu thức $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ được gọi là phần dư dạng Lagrange.

Nhiều khi công thức Taylor được dùng dưới dạng sau

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + O((x - x_0)^n). \quad (33)$$

Biểu thức $R_n(x) = O((x - x_0)^n)$ được gọi là phần dư dạng Peano.

Đối với công thức Taylor (32), với $x_0 = 0$ ta có công thức Maclaurin

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x), \quad (34)$$

với phần dư $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$ hoặc $R_n(x) = O((x)^n)$.

Công thức Maclaurin một số hàm sơ cấp:

- 1) $f(x) = e^x$, do $f^{(k)}(x) = e^x$, $f^{(k)}(0) = 1 \forall k = 0, 1, \dots, n + 1$
 $\Rightarrow e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^n)$.

$$2) f(x) = \sin x, \text{ ta có } f^{(k)} = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(2n)}(0) = \sin(n\pi) = 0,$$

$$f^{(2n-1)}(0) = \sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^{n-1}, n = 1, 2, 3 \dots$$

$$\Rightarrow \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + O(x^{2n}).$$

$$3) f(x) = \cos x. \text{ Tương tự ta có}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+1}).$$

$$4) f(x) = (1+x)^\alpha, x > -1, \alpha \in \mathbf{R}, \text{ ta có}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + O(x^{n+1}).$$

Đặc biệt

$$a) \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + O(x^{n+1}).$$

$$b) \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + O(x^3).$$

$$c) \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + O(x^3).$$

$$5) f(x) = \ln(1+x), x > -1, \text{ ta có}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1}).$$

$$6) f(x) = \arctan x, x \in \mathbf{R}, \text{ ta có}$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + O(x^{2n}).$$

Sử dụng các triển khai 1) - 6) ta có thể tìm được khai triển của một số hàm số khác mà không phải sử dụng đạo hàm trực tiếp các hàm số đó.

Ví dụ 13. Viết khai triển Maclaurin của hàm $e^{\cos x}$ đến số hạng x^4 .

Ví dụ 14. Viết công thức Taylor của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x}$ đến số hạng bậc ba của $x-1$.

Ví dụ 15. (2017) Tìm $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - \sin 2}{x^2}$.

Ví dụ 16. (2020-2) Tìm khai triển Taylo của hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ tại $x = 1$ đến $(x-1)^4$.

Ví dụ 17. (2019N1) Tính gần đúng $e^{0.1}$ với sai số bé hơn 10^{-4} .

Ví dụ 18. (2019-2) Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$. Tính $f^{(1500)}(0)$

Ví dụ 19. (2022N2) Cho hàm số $f(x) = \sqrt[3]{1+x^2}$. Tính $f^{(10)}(0)$

Một số chú ý khi thay tương đương khi có hiệu hai vô cùng bé (VCB)

(1) Nếu $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \beta_1(x), \beta_2(x)$ là các VCB khi $x \rightarrow x_0$ và $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x), \beta_1(x) \sim \beta_2(x)$ thì $\alpha_1(x) - \beta_1(x) \sim \alpha_2(x) - \beta_2(x)$ ngoại trừ trường hợp $\alpha_1(x)$ và $\beta_1(x)$ là các VCB tương đương hoặc không so sánh được với nhau.

Trường hợp $\alpha_1(x) + \beta_1(x)$ có tương đương với $\alpha_2(x) + \beta_2(x)$ hay không chúng ta lập luận tương tự. Vẫn thay tương đương được bình thường ngoại trừ trường hợp $\alpha_1(x)$ và $\beta_1(x)$ là các VCB tương đương hoặc không so sánh được với nhau.

(2) Hiệu hai VCB tương đương

Trong mục (1) chúng ta biết rằng không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) \pm \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Hiệu hai VCB cùng bậc là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó, vậy cụ thể, cao hơn là bậc bằng bao nhiêu? Lấy, chẳng hạn, $\alpha(x) = x$, ở ví dụ trên ta đã chỉ ra một số hiệu của hai VCB tương đương "trong tự nhiên", như là $x - \sin x \sim x^3$ cùng bậc với VCB $\alpha(x) = x^3$, còn $x - (e^x - 1) \sim -x^2$ cùng

bậc với VCB $\beta(x) = x^2$ khi $x \rightarrow 0$. Với các VCB tương đương "nhân tạo" sau đây thì $x - \beta(x)$ có thể cùng bậc với x^a ($a > 1$) bất kì.

(3) Ba phương pháp (mới) để tính giới hạn

Như vậy đến thời điểm hiện tại chúng ta đã học được ba phương pháp mới để tính giới hạn, đó là

- Phương pháp sử dụng VCB-VCL (thay tương đương, ngắt bỏ),
- Phương pháp dùng khai triển Maclaurin,
- Phương pháp dùng quy tắc L'Hospital.

Ví dụ 19. Tìm các giới hạn sau

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x) - \sin(\sin x)}{\tan x - \sin x}; \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 + 2x^4} \cos(\sqrt{2}x^2)}{x^5 \ln(1 - 2x^3)};$$

Ví dụ 20. Tìm các giới hạn sau $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2}$;

Cách 1. (thay tương đương) $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) - \sin x + (1 - \cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x + x^2/2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2}{x^2} = \frac{1}{2}.$

Cách 2. (dùng quy tắc L'Hospital) $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x + \sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x + \cos x}{2} = 1$

Có 2 cách giải (cách nào đúng????????):

Ví dụ 21. (2020N1) Tìm $a, b, c \in \mathbb{R}$ sao cho $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x + ax + bx^2}{x^3} = c$;

IV. Khảo sát hàm số

4.1. Một số vấn đề liên quan với đồ thị hàm số

4.1.1. Sự tăng giảm của hàm số

Định lý 4.1.1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục và có đạo hàm hữu hạn trong khoảng $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ tăng (hay đồng biến) trong khoảng (a, b) là $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$; ngược lại $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$ thì hàm số $f(x)$ giảm (hay nghịch biến) trong khoảng (a, b) .

Hàm số đồng biến hay nghịch biến gọi chung là **hàm đơn điệu**.

Trong trường hợp $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$ thì ta nói hàm số $f(x)$ không giảm trong (a, b) , ngược lại $f'(x) \leq 0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ không tăng trong khoảng đó.

Từ định lý này ta suy ra cách tìm khoảng tăng, giảm của hàm số $y = f(x)$ như sau:

- 1) Tìm miền xác định của hàm số trong khoảng tương ứng hàm số liên tục.
- 2) Tính $y' = f'(x)$.
- 3) Tìm nghiệm thực của phương trình $f'(x) = 0$ hoặc các điểm mà $f'(x) = \infty$, hoặc $f'(x)$ không tồn tại thuộc miền xác định của hàm số. Các điểm ấy gọi là các **điểm tới hạn**.
- 4) Sắp xếp tất cả các điểm trên theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên xét dấu của $f'(x)$ trong khoảng xác định tương ứng ta được khoảng tăng, giảm của hàm số đã cho.

Ví dụ 1. Tìm khoảng tăng, giảm của hàm số $y = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$.

Ví dụ 2. Tìm khoảng tăng giảm của hàm số $y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

4.1.2. Cực trị của hàm số

Định nghĩa 4.1.1. Hàm số $y = f(x)$ gọi là **đạt cực đại tại điểm** $x_0 \in \text{MXD}$, nếu mọi điểm x thuộc lân cận của điểm $x_0, x - x_0 = \Delta x$, với Δx khá bé, dương hoặc âm ta đều có $f(x) = f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0)$.

Ngược lại: $f(x) = f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0)$ thì ta nói hàm số **đạt cực tiểu tại điểm** x_0 .

Giá trị cực đại, cực tiểu gọi chung là **cực trị của hàm số**, còn điểm $x = x_0$ để hàm số đạt cực trị gọi là **điểm cực trị của hàm số**.

Chú ý 1: Muốn xác định một điểm nào đó là điểm cực trị ta cần so sánh giá trị của hàm số tại điểm đó với giá trị của hàm số tại một lân cận của nó về cả hai phía, cho nên một hàm số xác định trên đoạn kín $[a, b]$ ta chỉ xét cực trị tại những điểm bên trong của đoạn đó, nghĩa là những điểm $x \in (a, b)$.

Chú ý 2: Giá trị cực trị ở đây chỉ có tính chất địa phương nghĩa là chỉ lớn hơn hoặc bé hơn trong "lân cận" của nó chứ không phải trong toàn khoảng của miền xác định.

Định lý 4.1.2. (Điều kiện cần của cực trị). Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm $x_0 \in MXĐ$, có đạo hàm giới nội tại điểm $x = x_0$ và lân cận của nó thì $f'(x_0) = 0$.

Chú ý: Định lý trên chỉ cho điều kiện cần không đủ, nghĩa là $f'(x_1) = 0$ thì chưa hẳn điểm x_1 là điểm cực trị.

Định lý 4.1.3. (Điều kiện đủ của cực trị). Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định liên tục trong khoảng (a, b) chứa điểm tới hạn x_0 và có đạo hàm giới nội trong toàn khoảng ấy (có thể trừ điểm x_0). Nếu khi x vượt qua điểm x_0 (từ trái sang phải) mà $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm thì điểm x_0 là điểm cực đại, ngược lại $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương thì điểm ấy là điểm cực tiểu.

(Các định lý này đã biết trong giáo trình phổ thông)

Từ định lý này ta suy ra quy tắc tìm cực trị của hàm số như sau:

- 1) Tìm miền xác định của hàm số $y = f(x)$.
- 2) Tính $y' = f'(x)$, tìm các điểm tới hạn, nghĩa là tìm các điểm $f'(x) = 0, f'(x) = \infty, f'(x)$ không tồn tại, thuộc $MXĐ$.
- 3) Sắp xếp các điểm tới hạn theo thứ tự tăng dần và xét dấu của đạo hàm trong khoảng tương ứng.

- 4) Tìm giá trị cực đại y_{max} và cực tiểu y_{min} của hàm số.

Chẳng hạn, trong ví dụ 1, thì điểm $x = \frac{1}{2}$ là điểm cực tiểu và giá trị cực tiểu là

$$y_{min} = y\left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt[3]{4}.$$

Trong ví dụ 2, thì $x = 0$ là điểm cực đại và $y_{max} = y(0) = \frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 3. Tìm cực trị của hàm số $y = (x^2 - 1)^3 + 1$.

Ví dụ 4. Tìm cực trị của hàm số $y = (x - 1)\sqrt[3]{x^2}$.

Ví dụ 5. (2018N2) Tìm cực trị của hàm số $f(x) = (2x + 3)e^{x^2}$

Trong thực tế ta gặp những hàm số có vô số điểm tới hạn, không có khả năng sắp xếp thứ tự của các điểm tới hạn (nghĩa là không lập được bảng biến thiên của hàm số). Khi đó có thể sử dụng kết quả sau

Định lý 4.1.4. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định liên tục và có đạo hàm liên tiếp đến cấp n trong khoảng (a, b) . Điểm $x = x_0 \in (a, b)$ và $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, còn $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

1) Nếu $n = 2k$ ($k = 1, 2, \dots$) là số chẵn thì hàm số đạt cực trị tại điểm x_0 và là cực đại nếu $f^{(n)}(x_0) < 0$, là cực tiểu nếu $f^{(n)}(x_0) > 0$.

2) Nếu $n = 2k - 1$ ($k = 1, 2, \dots$) là số lẻ thì hàm số không đạt cực trị tại điểm đó.

Trường hợp riêng khi $n = 2$, nghĩa là $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$, hàm số đạt cực trị x_0 và nếu $f''(x_0) > 0$ hàm số đạt cực tiểu, và $f''(x_0) < 0$ hàm số đạt cực đại. (Trường hợp này đã biết từ giáo trình phổ thông, còn Định lý 4.1.4 là mở rộng đối với đạo hàm cấp cao hơn 2).

Ví dụ 6. Tìm cực trị của hàm số $y = \sin 2x - x$.

Ví dụ 7. (2022N1) Tìm cực trị của hàm số $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x + x$, trong khoảng $(0, 2\pi)$

4.1.3. Giá trị lớn nhất, bé nhất của hàm số trên đoạn $[a, b]$

Định nghĩa 4.1.2. Hàm số $f(x)$ gọi là đạt giá trị lớn nhất (Ln) tại điểm $x_1 \in [a, b]$ nếu: $\forall x \in [a, b]$ ta đều có $f(x) \leq f(x_1)$.

Ngược lại, $\forall x \in [a, b]$ ta đều có $f(x) \geq f(x_2)$, $x_2 \in [a, b]$ thì $f(x_2)$ gọi là giá trị bé nhất (Bn) của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$.

Từ định nghĩa trên ta suy ra cách tìm giá trị Ln và Bn của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a, b]$ như sau:

1) Tìm các điểm tới hạn của hàm số $y = f(x)$ trong khoảng (a, b) , đó là những điểm mà $f'(x) = 0$, $f'(x) = \infty$ hoặc $f'(x)$ không tồn tại.

2) Tính giá trị của hàm số $y = f(x)$ tại các điểm tới hạn trong khoảng (a, b) và tính $f(a), f(b)$.

3) So sánh các giá trị tìm được, ta được giá trị Ln và Bn của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a, b]$ đó.

4.1.4. Khoảng lồi, lõm, điểm uốn của đường cong

Định nghĩa 4.1.3. Đường cong $y = f(x)$ gọi là lồi trong khoảng (a, b) nếu mọi điểm của đường cong đều nằm phía dưới của mọi tiếp tuyến của nó trong khoảng đó.

Đường cong gọi là lõm trong khoảng (a, b) nếu mọi điểm của đường cong đều nằm phía trên của mọi tiếp tuyến của nó trong khoảng đó.

Điểm phân chia phần lồi, phần lõm (và ngược lại) của đường cong liên tục và có tiếp tuyến gọi là điểm uốn của đường cong.

Định lý 4.1.4. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục và có đạo hàm đến cấp 2 trong khoảng (a, b) .

Nếu $f''(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$ thì đồ thị hàm số lõm trong khoảng đó, ngược lại $f''(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$ thì đồ thị hàm số lồi trong khoảng đó.

Nếu $f''(x_0) = 0$, hoặc không tồn tại, nhưng tồn tại $f'(x_0)$ và $f(x)$ đổi dấu khi vượt qua x_0 thì điểm $(x_0, f(x_0))$ gọi là điểm uốn.

Như vậy để tìm khoảng lồi, lõm, điểm uốn của đường cong thực chất là xét dấu của đạo hàm cấp hai.

Ví dụ 8. Tìm khoảng lồi, lõm, điểm uốn của đường cong $y = 2 - |x^5 - 1|$.

Giải: Hàm số đã cho viết lại dưới dạng:

$$y = \begin{cases} 2 - (x^5 - 1) = 3 - x^5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2 + (x^5 - 1) = 1 + x^5 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

Hàm số xác định liên tục $\forall x \in \mathbf{R}$.

Ta có $y' = \begin{cases} -5x^4 & \text{khi } x > 1 \\ 5x^4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$, tại điểm $x = 1$ đạo hàm không tồn tại.

$$y'' = \begin{cases} -20x^3 & \text{khi } x > 1 \\ 20x^3 & \text{khi } x < 1 \end{cases}, y'' = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Lập bảng xét dấu của đạo hàm cấp 2, suy ra khoảng lồi, lõm và điểm uốn:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y''		0	+	-
y		1	2	
		Lõm	U lồi G	lõm

Điểm U (0;1) là điểm uốn. Điểm G(1;2) là điểm góc (hay điểm gãy).

Chú ý Bất đẳng thức hàm lồi:

1. Một hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$ được gọi là lồi nếu với mọi $x_1, x_2 \in [a, b]$ và $\lambda \in [0, 1]$, ta có bất đẳng thức sau:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

2. Dạng khác $\lambda = 1/2$: $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ với mọi $x_1, x_2 \in [a, b]$

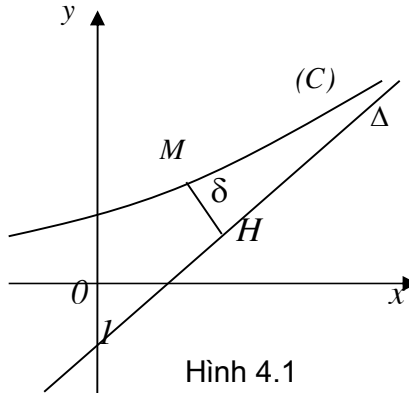
Ví dụ 9. (2021N3) Cho hàm số $f(x) = xe^x$ xác định trên đoạn $[a, b]$, $b > a > 0$.

Chứng minh rằng với mọi $c \in [a, b]$ ta có $\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Ví dụ 10. (2018N1) Cho $0 < x, y < \pi/2$.

4.1.5. Đường tiệm cận

Định nghĩa 4.1.5. Đường thẳng Δ gọi là **đường tiệm cận** của đường cong (C) ($y = f(x)$) nếu như khoảng cách δ từ điểm chạy $M(x, y)$ trên đường cong (C) đến đường thẳng Δ dần tới 0 khi M chạy ra vô hạn trên đường cong (C) (Hình 4.1).



Hình 4.1

Từ định nghĩa ta thấy đường cong có đường tiệm cận chỉ khi đường cong ấy có điểm ra vô hạn (có nhánh đồ thị kéo dài ra vô hạn).

Người ta phân biệt ba loại đường tiệm cận là:

1) Tiệm cận đứng: Tiệm cận đứng là đường thẳng (tiệm cận) Δ song song với trục tung Oy. Như vậy, nếu đường cong $y = f(x)$ có tiệm cận đứng thì phương trình tiệm cận đứng (Δ) có dạng $x = a$ (hữu hạn) và

$$\delta = |x - a| \rightarrow 0 \text{ khi } y \rightarrow \infty, \text{ (hay } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty). \quad (1)$$

2) Tiệm cận xiên: Phương trình đường tiệm cận xiên $y = ax + b$, (a, b là hằng số cần xác định hữu hạn) và

$$\begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \\ b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]. \end{cases} \quad (2)$$

Khi $a = 0 \Rightarrow y = b$ là tiệm cận ngang (song song với trục hoành Ox).

Ví dụ 11. Tìm các đường tiệm cận của đường cong $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

Ví dụ 12. (2017N1) Tìm các đường tiệm cận của đường cong $y = xe^{\frac{-1}{x}} + 2$

Ví dụ 13. (2020-2) Tìm cực trị của hàm số $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{2}{x^2}} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

Ví dụ 14. (2020-2) Tìm các tiệm cận của đường cong $f(x) = \sqrt{1 + 9x^2}$.

4.2. Sơ đồ khảo sát hàm số dạng $y = f(x)$

Quá trình khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$:

1) Tìm miền xác định của hàm số, chú ý các điểm gián đoạn, tính chất chẵn, lẻ và tuần hoàn của hàm số.

- 2) Tính y' , tìm các điểm $y' = 0, y' = \infty$ và y' không tồn tại. Lập bảng xét dấu y' , từ đó kết luận khoảng tăng, giảm, cực trị của hàm số.
- 3) Tính y'' , tìm các điểm cho $y'' = 0$ và y'' không tồn tại. Lập bảng xét dấu y'' , từ đó kết luận khoảng lồi, lõm, điểm uốn, điểm góc của hàm số.
- 4) Tìm các tiệm cận của hàm số.
- 5) Cho điểm đặc biệt (điểm cắt trục hoành, cắt trục tung, điểm cực trị...).
- 6) Vẽ đồ thị.

Ví dụ 1. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = x + \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$.

Giải: Miền xác định $\forall x \in \mathbb{R}, (-\infty < x < +\infty)$.

Ta có $y' = 1 + \frac{4x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}, \quad y'(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + \sqrt{4 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} + 1} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + \sqrt{4x^2 + 2x + 1}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2|x|) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{4x^2 + 2x + 1} + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2|x| + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty.$$

Bảng biến thiên xét dấu y' :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'		0	
y	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -\frac{1}{2}$ và $y_{\min} = y(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

Ta có $y'' = \frac{\sqrt{4x^2+2x+1} \cdot 4 - (4x+1) \cdot \frac{4x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}}{(4x^2+2x+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{(4x^2+2x+1)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow y'' > 0, \forall x$ do đó đồ thị hàm số lõm.

+Tiệm cận: Hàm số không có tiệm cận đứng.

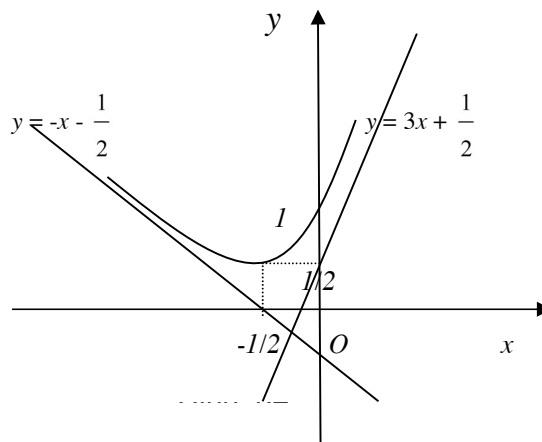
Tiệm cận xiên dạng $y = ax + b$, trong đó

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{4x^2 + 2x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2|x|}{x} = 3,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}+2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}.$$

Vậy $y = 3x + \frac{1}{2}$ là tiệm cận xiên nhánh phải khi $x \rightarrow +\infty$.

Tương tự ta có tiệm cận xiên nhánh trái $y = -x - \frac{1}{2}$ khi $x \rightarrow -\infty$. Đồ thị (Hình 4.2)



Ví dụ 2. Khảo sát vẽ đồ thị của hàm số $y = e^{\frac{1}{x-1}}$.

4.3. Đường cong cho dưới dạng tham số**4.3.1. Khái niệm về đường cong cho dưới dạng tham số**

Trong cơ học ta thường gặp đường cong cho theo tham số.

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (3)$$

xác định một đường cong nào đó trong mặt phẳng tọa độ xOy . Hệ phương trình (3) gọi là phương trình tham số của đường cong, t là tham số.

Ví dụ 1. Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(x_A, y_A)$ và $B(x_B, y_B)$.

Ví dụ 2. Lập phương trình tham số của đường tròn tâm tại gốc $O(0;0)$, bán kính R .

Tương tự, ta cũng có phương trình tham số của đường elip:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{là} \quad \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (4)$$

Ví dụ 3. Lập phương trình tham số quỹ đạo điểm M nằm trên đường tròn bán kính a lăn không trượt trên một đường thẳng, quỹ đạo đó gọi là đường xicloid (ví dụ bánh xe đạp lăn không trượt trên đường thì đầu van bánh xe vẽ nên đường xicloid).

4.3.2. Đạo hàm của hàm cho theo tham số

Giả sử $y = y(x)$ được cho dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (5)$$

Trong đó ϕ, ψ là những hàm số khả vi theo biến số t , đồng thời hàm số $x = \phi(t)$ tồn tại hàm ngược $t = \phi^{-1}(x)$.

Khi đó, từ $y'_x = \frac{dy}{dx}$; $dy = \psi'(t) dt$; $dx = \phi'(t) dt$, ta có $y'_x = \frac{\psi'(t) dt}{\phi'(t) dt}$ hay $y'_x = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$.

Tính
$$y''_{xx} = [y'_x]_x = \left[\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)} \right]_t \cdot t'_x = \frac{\phi''(t)\psi'(t) - \psi''(t)\phi'(t)}{\phi'^3(t)} \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{\phi''(t)\psi'(t) - \psi''(t)\phi'(t)}{\phi'^3(t)}.$$

Vậy
$$y''_{xx} = \frac{\phi''(t)\psi'(t) - \psi''(t)\phi'(t)}{\phi'^3(t)}. \quad (6)$$

4.3.3. Tiệm cận của đường cong cho theo tham số

Từ khái niệm tiệm cận của đường cong, ta có:

- 1) Nếu $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a$ (hữu hạn), $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \infty$, thì đường thẳng $x = a$ là đường tiệm cận đứng.
- 2) Nếu $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \infty$, $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = b$ (hữu hạn), thì $y = b$ là đường tiệm cận ngang.
- 3) Nếu $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a$, ($a \neq 0$), $\lim_{t \rightarrow t_0} [y(t) - ax(t)] = b$ thì $y = ax + b$ là đường tiệm cận xiên

Để khảo sát đường cong cho theo tham số ta tiến hành như trong mục 4.2.

Ví dụ 4.. (2018-2) Tìm tiệm cận xiên của đường cong $x = \frac{t^2}{1-t}$, $y = \frac{3t^3}{1-t^3}$.

Ví dụ 5. (2022-N1) Tìm các tiệm cận của đường cong $x = \frac{t-1}{1+t^3}$, $y = \frac{2}{1+t^3}$.

Ví dụ 6. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, \quad a > 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

Giải: Do hàm số đã cho chẵn đối với $\cos t$, lẻ đối với $\sin t$ (chẵn đối với x , lẻ đối với y), nên đồ thị hàm số trên đoạn $[\pi; 2\pi]$ sẽ đối xứng với đồ thị hàm số trên đoạn $[0; \pi]$ qua trục hoành. Trên đoạn $[0; \pi]$ thì đồ thị đối xứng qua trục tung. Vì vậy ta chỉ cần khảo sát trên $[0; \frac{\pi}{2}]$, sau đó vẽ đối xứng qua Oy được đồ thị trên đoạn $[0; \pi]$, rồi vẽ tiếp đối xứng qua trục hoành, được đồ thị trên toàn đoạn $[0; 2\pi]$. Hơn thế nữa hàm số đã cho tuần hoàn chu kỳ 2π , nên đồ thị lập lại hoàn toàn trong mỗi chu kỳ $T = 2\pi$.

Tính y'_x, y''_{xx} . Theo các công thức (8), ta có $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} = -\tan t, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Khi $t = 0$ thì $y'_x \Big|_{t=0} = -\tan 0 = 0$, đồ thị có tiếp tuyến nằm ngang.

Khi $t = \frac{\pi}{2}$ thì $y'_x \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = -\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty$, đồ thị có tiếp tuyến thẳng đứng.

Mặt khác $y'_x < 0$ khi $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y$ giảm từ $a \rightarrow 0$ khi x đi từ $0 \rightarrow a$.

Theo các công thức (9), ta có

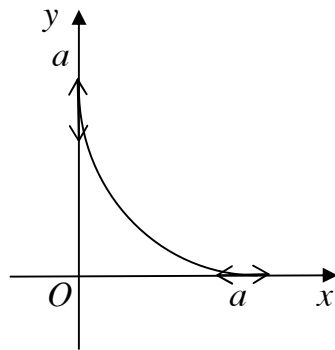
$$y''_{xx} = (-\tan t)'_x = (-\tan t)'_t \cdot t'_x = -\frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{x'_t} = -\frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{-1}{3a \cos^2 t \sin t} = \frac{1}{3a \cos^4 t \sin t} > 0, \forall t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Vậy đồ thị hàm số lõm.

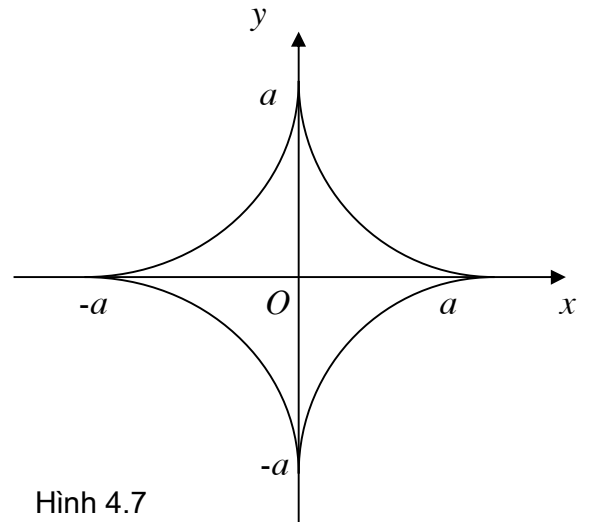
Bảng tọa độ những điểm đặc biệt

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
x	a	$a \frac{\sqrt{2}}{4}$	0
y	0	$a \frac{\sqrt{2}}{4}$	a

Đồ thị trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (Hình 4.6), từ đó ta suy ra đồ thị trên



Hình 4.6



Hình 4.7

Ví dụ 7. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số cho dưới dạng tham số $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}, (a > 0)$.

Đồ thị không có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang,

vì không có giá trị t để $x \rightarrow c$ (hữu hạn),

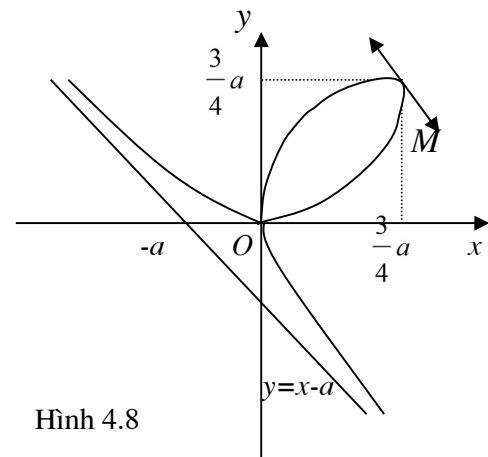
$y \rightarrow \infty$ và $x \rightarrow \infty, y \rightarrow d$ (hữu hạn).

Vậy đồ thị có tiệm cận xiên $y = -x - a$.

Dựa vào bảng trên ta được đồ thị hàm số.

Đặc biệt $x = y$ khi $3at = 3at^2 \Leftrightarrow t = 0, t = 1$.

Do đó $t = 0$ ta có $O(0; 0), t = 1$ ta có $M\left(\frac{3}{4}a; \frac{3}{4}a\right)$.



Hình 4.8

4.4. Đường cong trong hệ tọa độ cực

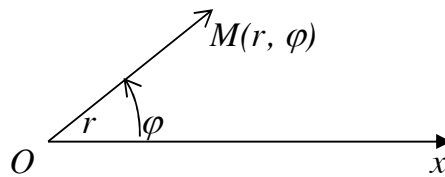
4.4.1. Hệ tọa độ cực

Trong mặt phẳng chọn điểm O cố định gọi là cực và nửa đường thẳng nằm ngang đi qua O gọi là trục cực. Khi đó vị trí điểm M trong mặt phẳng sẽ được xác định bởi hai số r, φ trong đó r là khoảng cách từ điểm M đến cực O (gọi là bán kính cực) và góc φ là góc cố định hướng từ trục cực tới vectơ $\overrightarrow{OM}$, chiều dương là chiều quay ngược với chiều kim đồng hồ (gọi là góc cực) (Hình 4.9).

Các số r và φ gọi là tọa độ cực của điểm M và ký hiệu $M(r, \varphi)$.

Thông thường chọn $r \geq 0$ với r cố định thì φ sẽ thuộc $[0; 2\pi]$ sau đó lặp lại sau mỗi chu kỳ $T = 2\pi$.

Vậy với r cố định, $\varphi \in [0; 2\pi]$ cố định thì xác định điểm M duy nhất trong mặt phẳng. Khi $r = 0$ thì φ tùy ý.

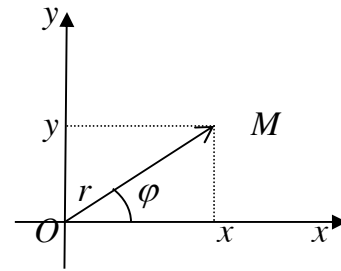


Hình 4.9

Nếu chọn hệ tọa độ vuông góc xOy , gốc O trùng với cực, trục Ox trùng với trục cực thì giữa tọa độ vuông góc và tọa độ cực có mối liên hệ (Hình 4.10)

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi \text{ và ngược lại}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$



Chú ý: Khi chọn góc φ cần căn cứ vào điểm $M(x, y)$ thuộc góc phần tư nào của hệ tọa độ vuông góc để được góc φ thích hợp. Chẳng hạn $M(-1; \sqrt{3})$ thì

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

4.4.2. Hệ tọa độ cực mở rộng

Cho $M(r, \varphi)$, với r, φ không hạn chế bởi $r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$, mà có thể lấy các giá trị bất kỳ. Khi đó một điểm trên mặt phẳng có thể có nhiều tọa độ cực khác nhau. Ta quy ước điểm (r, φ) là điểm được xác định: vẽ tia $\overrightarrow{Ot}$ sao cho $\overrightarrow{Ot}$ tạo với Ox một góc φ . Trên tia $\overrightarrow{Ot}$ kéo dài lấy điểm M sao cho $\overline{OM} = r$ ($\overline{OM}$ là độ dài đại số của $\overrightarrow{OM}$ trên tia $\overrightarrow{Ot}$).

Chẳng hạn, cho M có tọa độ $r = -1, \varphi = \frac{\pi}{3}$,

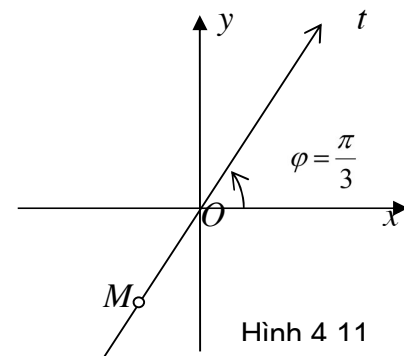
ta lấy điểm M sao cho $\overline{OM} = -1$

(Hình 4.11) thì $\overrightarrow{OM}$ ngược hướng với $\overrightarrow{Ot}$.

Chuyển sang tọa độ đề các:

$$x = -1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2},$$

$$y = -1 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$



Hình 4.11

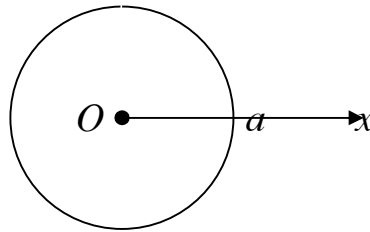
Trong hệ tọa độ cực mở rộng điểm $M\left(-1; \frac{\pi}{3}\right)$ còn được biểu diễn bằng nhiều cách:

$$\left(1; \frac{4\pi}{3}\right), \left(1; -\frac{2\pi}{3}\right), \left(1; \frac{7\pi}{3}\right), \dots$$

4.4.3. Đường cong trong hệ tọa độ cực

Cho hàm $r = f(\varphi)$ với $0 \leq \varphi < 2\pi, r \geq 0$. Vẽ đồ thị hàm số này trong hệ tọa độ cực. Phương trình $r = f(\varphi)$ được gọi là phương trình đường cong trong hệ tọa độ cực. Chẳng hạn,

1) Phương trình $r = a, a > 0$ là phương trình đường tròn tâm O , bán kính a trong hệ tọa độ cực (Hình 4.12). Trong hệ tọa độ đề các đường tròn này có phương trình $x^2 + y^2 = a^2$.



Hình 4.12

2) Lập phương trình đường tròn bán kính a , đi qua cực O và có tâm trên trục của Ox (Hình 4.13).

Giải: Tâm của đường tròn là $I(a, 0)$. Giả sử M

là điểm thuộc đường tròn với góc

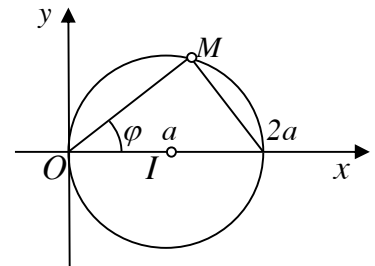
$$(Ox, \overrightarrow{OM}) = \varphi \text{ thì } r = OM = 2a \cos \varphi.$$

Trong hệ tọa độ vuông góc thì đường tròn

đó có phương trình là

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2ax.$$

Thay $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ vào phương trình, ta có $r = 2a \cos \varphi$.



Hình 4.13

4.4.4. Khảo sát và vẽ đường cong trong hệ tọa độ cực

Trong hệ tọa độ cực, khảo sát và vẽ đường cong cho bởi hàm số $r = f(\varphi)$ được thực hiện theo các bước:

1) Miền xác định của $f(\varphi)$. Lưu ý tính chẵn lẻ, tuần hoàn (nếu có).

2) Xét sự biến thiên của $f(\varphi)$ theo φ . Lập bảng biến thiên.

3) Vẽ đồ thị. Lưu ý một số điểm đặc biệt của đồ thị.

Để vẽ đồ thị được chính xác và thuận lợi cần chú ý một số vấn đề sau:

a) Tính tuần hoàn: nếu hàm $f(\varphi)$ tuần hoàn có chu kỳ T , ta chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị trong góc $0 \leq \varphi \leq T$, sau đó xoay đồ thị chu kỳ T , quanh gốc cực.

b) Tính đối xứng: nếu $f(\varphi)$ là hàm lẻ theo φ thì đồ thị đối xứng qua tia $\varphi = \frac{\pi}{2}$; nếu $f(\varphi)$ là hàm chẵn theo φ thì đồ thị đối xứng qua trục cực.

c) Tiếp tuyến của đường cong: để vẽ tiếp tuyến với đường cong tại điểm M , ta sẽ tính góc θ giữa $\overrightarrow{OM}$ và tiếp tuyến đó, (Hình 4.14).

Theo hình vẽ ta có $\alpha = \varphi + \theta$ Khi đó $\tan \alpha = \tan(\varphi + \theta) = \frac{\tan \varphi + \tan \theta}{1 - \tan \varphi \tan \theta}$.

Mặt khác: $\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi}$, $r' = \frac{dr}{d\varphi}$. Thế $\tan \alpha$ vào biểu thức $\tan \theta$ ta có $\tan \theta = \frac{r}{r'}$.

Ví dụ 8. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $r = 2a(1 + \cos \varphi), (a > 0)$.

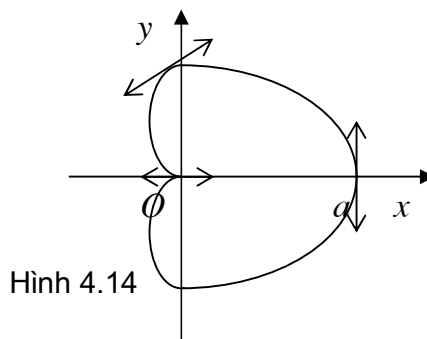
Giải: Miền xác định: $\forall \varphi$. Chu kỳ của r theo φ là $T = 2\pi$, nên chỉ xét $-\pi \leq \varphi \leq \pi$; mặt khác thay φ bởi $-\varphi$ thì r không đổi ($r = r(\varphi)$ hàm chẵn theo φ) do đó đồ thị đối xứng qua trục cực, nên chỉ xét $0 \leq \varphi \leq \pi$.

$$\text{Ta có } \tan \theta = \frac{r}{r'} = \frac{2a(1+\cos \phi)}{-2 \sin \phi} = \frac{-2 \cos^2 \frac{\phi}{2}}{2 \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2}} = -\cot \frac{\phi}{2} = \tan \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\phi}{2} \right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\phi}{2}$$

Bảng biến thiên

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π
r	$4a$	$2a$	0
θ	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π

Vẽ đồ thị với $0 \leq \varphi \leq \pi$ rồi vẽ đối xứng qua trục hoành. Đồ thị (Hình 4.14).



Hình 4.14

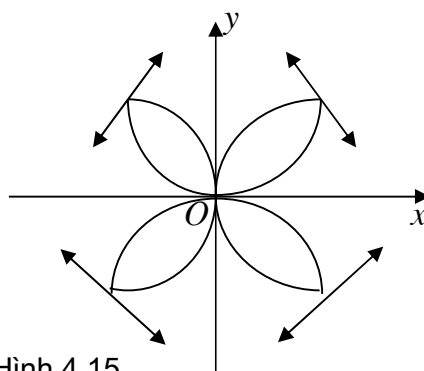
Ví dụ 9. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $r = a \sin 2\varphi$ ($a > 0$).

Giải: Hàm số r tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$, nên chỉ xét $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Mặt khác hàm số lẻ theo φ nên chỉ xét $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, sau đó lấy đối xứng đồ thị (vừa khảo sát với $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$) qua trục Oy, rồi xoay quay gốc cực O phần đồ thị (với $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$) một chu kỳ T .

Ta có $\tan \theta = \frac{r}{r'} = \frac{a \sin 2\phi}{2a \cos 2\phi} = \frac{1}{2} \tan 2\phi$. Bảng biến thiên

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
r'	$2a$	+	0
r	0	a	0
$\tan \theta$	0	∞	0

Trong góc $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ gồm một cánh, lấy đối xứng qua trục Oy ta được hai cánh với $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Sau đó quay quanh gốc cực chu kỳ $T = \pi$, ta được toàn bộ đồ thị gồm bốn cánh (Hình 4.15), được gọi là hoa hồng bốn cánh.



Hình 4.15

Chương 2

PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN SỐ

2.1. Nguyên hàm và tích phân bất định

2.1.1. Định nghĩa

Định nghĩa 2.1.1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng (a, b) . Hàm số $F(x)$ được gọi là **một nguyên hàm** của $f(x)$ trên khoảng đó nếu hàm $F(x)$ khả vi và $F'(x) = f(x)$ hoặc $dF(x) = f(x) dx$ với $\forall x \in (a, b)$.

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x) + C$, (C là một hằng số tùy ý) cũng là một nguyên hàm của $f(x)$.

Thật vậy, nếu $F(x)$ và $G(x)$ là các nguyên hàm của $f(x)$ thì ta có

$$\begin{aligned}(F(x) - G(x))' &= F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0, \forall x \in (a, b), \\ \Rightarrow F(x) - G(x) &= C, \forall x \in (a, b), \\ \Rightarrow F(x) &= G(x) + C, \forall x \in (a, b).\end{aligned}$$

Vậy mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ sai khác nhau một hằng số.

Định nghĩa 2.1.2. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng (a, b) , thì biểu thức $F(x) + C$, C là một hằng số tùy ý, gọi là **tích phân bất định** của hàm $f(x)$ trên khoảng đó.

Ký hiệu $\int f(x) dx = F(x) + C$.

Trong đó $\int$ gọi là **dấu tích phân**, $f(x)$ gọi là **hàm số dưới dấu tích phân**, $f(x)dx$ gọi là **biểu thức dưới dấu tích phân và x gọi là biến số lấy tích phân**.

Chú ý: Mọi hàm $f(x)$ liên tục trên khoảng (a, b) thì đều có nguyên hàm trong khoảng đó.

Ví dụ 1.

$$a) \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

$$b) \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$c) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

2.1.2. Tính chất của tích phân bất định

Từ định nghĩa tích phân bất định ta chứng minh được một số tính chất sau:

- 1) $(\int f(x) dx)' = f(x)$ hoặc $(\int f'(x) dx) = f(x)$
- 2) $\int F'(x) dx = F(x) + C$ hoặc $\int dF(x) = F(x) + C$.
- 3) $\int af(x) dx = a \int f(x) dx$, $a - \text{const.}$
- 4) $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.
- 5) Nếu $\int f(x) dx = F(x) + C$ thì $\int f(u) du + C = F(u) + C$, với $u = u(x)$ bất kỳ.

Ví dụ 2. Tính

$$a) I = \int (x^2 - 2)^2 dx; \quad b) J = \int \sin(3x + 2) dx.$$

2.1.3. Bảng tích phân cơ bản

Sử dụng bảng công thức đạo hàm hàm số sơ cấp cơ bản ta có bảng một số tích phân cơ bản:

- 1) $\int 0 dx = C$ $C - \text{const.}$,
- 2) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$; $\int dx = x + C$; $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C$.
- 3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
- 4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$; $\int e^x dx = e^x + C$.
- 5) $\int \cos x dx = \sin x + C$;
- 6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

$$7) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$$

$$8) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C.$$

$$9) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C.$$

$$10) \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C; \quad \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$11) \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C; \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{coth} x + C.$$

Để tính tích phân, ta biến đổi hàm dưới dấu tích phân thành tổng các tích phân cơ bản rồi áp dụng công thức ta được kết quả.

Ví dụ 3. Tính

$$a) \int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^3}} dx;$$

$$b) \int \frac{1-x^2}{1+x^2} dx;$$

$$c) \int \frac{dx}{x^2-a^2};$$

$$d) \int \frac{3x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}};$$

$$e) \int \frac{dx}{1-\cos x};$$

$$f) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

$$g) \int \frac{dx}{a^2+x^2};$$

$$h) \int \cos 3x \cdot \cos 2x dx$$

Nhiều tích phân không thể phân tích thành tổng các tích phân cơ bản, ta phải sử dụng các phương pháp sau.

2.1.4. Phương pháp tính tích phân bất định

2.1.4.1. Phương pháp đổi biến

Định lý 2.1.1. Nếu $\int g(t)dt = G(t) + C$ thì $\int g[\phi(x)]\phi'(x)dx = G[\phi(x)] + C$, trong đó là $g(t)$, $\phi(x)$, $\phi'(x)$ những hàm số liên tục.

Chú ý: Trong một số trường hợp khi tính $\int f(x)dx$, nếu đặt $x = \phi(t)$, trong đó $\phi(t)$ là hàm số liên tục đơn điệu có đạo hàm $\phi'(t) \neq 0$, ta có công thức $\int f(x)dx = \int f[\phi(t)] \cdot \phi'(t)dt$.

Tính tích phân bên phải được nguyên hàm là hàm của t . Từ $x = \phi(t) \Rightarrow t = \phi^{-1}(x)$, thay trở lại được nguyên hàm của tích phân xuất phát.

Ví dụ 4. Tính

$$a) I = \int \frac{\cos \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}.$$

$$b) I = \int \sqrt{1-x} \cdot x^2 dx.$$

$$c) I = \int (\cos x \cdot \sin x) \cdot \sqrt{1+\sin^2 x} dx.$$

$$d) I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

$$e) I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx, (a > 0).$$

$$f) I = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}. \quad g) (2024N2) I = \int \frac{e^x}{e^{2x}+2} dx.$$

2.1.4.2. Phương pháp tích phân từng phần

Định lý 2.1.2. Nếu các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ khả vi và $u'(x)v(x)$ có nguyên hàm trên khoảng (a,b) thì

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du. \quad (1)$$

Chú ý: Khi tính tích phân bất định $\int f(x)dx$ bằng phương pháp tích phân từng phần ta cần lưu ý: biến đổi $f(x)dx = u dv$ sao cho việc tính tích phân $\int v du$ phải dễ hơn $\int u dv$.

Một số loại tích phân sau đây thường sử dụng phương pháp tích phân từng phần.

a) Dạng $\int P_n(x) \cdot f(x)dx$, trong đó $P_n(x)$ là đa thức bậc n đối với x , hàm số $f(x)$ là một trong những hàm số sau: $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$.

Khi đó ta đặt

$$u = f(x) = \begin{cases} \ln x, \\ \arcsin x, \\ \arccos x, \\ \arctan x, \\ \operatorname{arccot} x, \end{cases} \Rightarrow du = \begin{cases} \frac{dx}{x}, \\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \\ \frac{1}{1+x^2} dx, \\ \frac{-1}{1+x^2} dx, \end{cases}$$

còn $dv = P_n(x)dx = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)dx \Rightarrow v = \int P_n(x)dx = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$.

b) Dạng $\int P_n(x) \cdot g(x) dx$, trong đó $P_n(x)$ là đa thức bậc n đối với x , hàm số $g(x)$ là một trong những hàm số sau:

$$e^{ax}, \sin bx, \cos bx \text{ thì khi đó ta đặt } u = P_n(x), \text{ còn } dv = \begin{cases} e^{ax} dx = \frac{1}{a} de^{ax}, \\ \sin bx dx = -\frac{1}{b} d(\cos bx), \\ \cos bx dx = \frac{1}{b} d(\sin bx), \end{cases}$$

c) Dạng $I = \int e^{ax} \sin bx dx$, ($I = \int e^{ax} \cos bx dx$). Khi đó ta đặt $u = e^{ax}$ hoặc $u = \sin bx$, ($u = e^{ax}$ hoặc $u = \cos bx$) trường hợp này tích phân từng phần hai lần, ta được tích phân ban đầu I , giải phương trình đối với I được kết quả.

Ví dụ 5. Tính các tích phân sau:

- $I = \int \arctan x dx.$
- $I = \int (x+1) \sin x dx.$
- $I = \int x^2 e^x dx$
- $I = \int e^{2x} \cos 3x dx.$
- $I = \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx.$
- $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, n \in \mathbb{N}, n > 1.$
- $(2020N1) I = \int \arctan \sqrt{x} dx$

Từ các ví dụ trên ta có thể bổ sung vào bảng tính tích phân một số công thức

- $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arccot} \frac{x}{a} + C, a \neq 0.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + C = -\operatorname{arccos} \frac{x}{|a|} + C, a \neq 0.$
- $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, a \neq 0.$
- $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C, a \neq 0.$
- $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, a \neq 0.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, a \neq 0.$

2.1.5. Tích phân hàm phân thức hữu tỷ

2.1.5.1. Các phân thức hữu tỷ đơn giản

- + Phân thức dạng $\frac{A}{x-a}$, A, a là hằng số, gọi là phân thức đơn giản loại 1.
- + Dạng $\frac{A}{(x-a)^k}, (k > 1, k \in \mathbb{N}^+)$ gọi là phân thức đơn giản loại 2.
- + Dạng $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}, (\Delta = p^2 - 4q < 0)$ gọi là phân thức đơn giản loại 3.
- + Dạng $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, (\Delta < 0, k > 1, k \in \mathbb{N}^+)$ gọi là phân thức đơn giản loại 4.

Tính tích phân các phân thức đơn giản:

- $\int \frac{A dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C.$
- $\int \frac{A dx}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = \frac{A}{1-k} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C, \text{ với } k = 2, 3, \dots$
- $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx, \Delta = p^2 - 4q < 0.$
- $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx, \Delta = p^2 - 4q < 0, k = 2, 3, \dots$

Để tính (III) và (IV), ta biến đổi $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$,

đặt $u = x + \frac{p}{2}, a^2 = q - \frac{p^2}{4}$, ta có

$$(III) \int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2} \int \frac{2u}{u^2+a^2} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{A}{2} \ln(u^2 + a^2) + \frac{1}{a} \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \arctan \frac{u}{a} + C$$

$$(IV) \int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^k} = \frac{A}{2} \int \frac{2u}{(u^2+a^2)^k} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{du}{(u^2+a^2)^k} = \frac{-A}{2(k-1)} \cdot \frac{1}{(u^2+a^2)^{k-1}} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \cdot I_k,$$

(I_k được tính theo ví dụ 5, ý f), mục 2.1.4.

2.1.5.2. Dạng tổng quát của một hàm phân thức hữu tỷ

Dạng tổng quát của một hàm phân thức hữu tỷ là $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ trong đó $P_n(x), Q_m(x)$ là những đa thức bậc n, m tương ứng và không có nghiệm chung.

+ Nếu $n < m$ thì $f(x)$ được gọi là **phân thức hữu tỷ thực sự**.

+ Nếu $n \geq m$ thì $f(x)$ được gọi là **phân thức hữu tỷ không thực sự**.

Một hàm phân thức không thực sự, bao giờ cũng biểu diễn được dưới dạng tổng của một đa thức với một hàm phân thức hữu tỷ thực sự bằng cách chia tử số cho mẫu số.

Ví dụ 6. Cho $f(x) = \frac{x^6+x^5+5x^4+3x^3+5x^2+x+1}{x^5+2x^3+x}$.

Chia tử số cho mẫu số ta được $f(x) = x + 1 + \frac{3x^4+x^3+4x^2+1}{x^5+2x^3+x}$.

Trong đại số cao cấp, người ta chứng minh được kết quả sau

Định lý 5.1.3. Một phương trình đa thức bậc m hệ số thực $Q_m(x) = 0$ có đúng m nghiệm (thực hoặc phức) kể cả số bội và $Q_m(x)$ có thể phân tích được thành tích những thừa số bậc nhất và bậc 2 với biệt thức $\Delta < 0$:

$$Q_m(x) = A (x-a)^\alpha \dots (x^2 + px + q)^\beta, (\Delta = p^2 - 4q < 0),$$

trong đó α là số bội của nghiệm thực $x = a$, β là số bội các nghiệm phức liên hợp của phương trình $x^2 + px + q = 0$.

Vì vậy một hàm phân thức hữu tỷ thực sự phân tích được thành tổng của những hàm phân thức đơn giản loại 1, 2, 3, 4:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \dots + \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{B_\beta x+C_\beta}{(x^2+px+q)^\beta}, \quad (2)$$

trong đó $A_1, A_2, \dots, A_\alpha, \dots, B_1, C_1, B_2, C_2, \dots, B_\beta, C_\beta$ là những hằng số được xác định bằng cách quy đồng mẫu số ở vế phải (2) sau đó đồng nhất các hệ số của hai đa thức ở tử số, ta được hệ phương trình để xác định chúng.

Ví dụ 7. Hãy phân tích các phân thức sau thành tổng các phân thức hữu tỷ đơn giản

a) $f(x) = \frac{3x^4+x^3+4x^2+1}{x^5+2x^3+x}$.

Giải: Vì mẫu $x^5 + 2x^3 + x = x(x^4 + 2x^2 + 1) = x(x^2 + 1)^2$ nên

$$f(x) = \frac{3x^4+x^3+4x^2+1}{x^5+2x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Quy đồng mẫu số ở vế phải, sau đó đồng nhất hệ số của tử số, ta được

$$3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1 = (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A,$$

$$\Rightarrow A+B=3, C=1, 2A+B+D=4, C+E=0, A=1,$$

do đó $A=1, B=2, C=1, D=0, E=-1$.

Vậy $\frac{3x^4+x^3+4x^2+1}{x^5+2x^3+x} = \frac{1}{x} + \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}$.

b) Tính $I = \int \frac{3x^4+x^3+4x^2+1}{x^5+2x^3+x} dx$.

Giải: Theo Ví dụ 7, ý a) ta có

$$I = \int \frac{3x^4+x^3+4x^2+1}{x^5+2x^3+x} = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2x+1}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} - I_2 \text{ với } I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Tích phân I_2 là tích phân đơn giản loại 4, nên ta được

$$I_2 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan x + C \text{ (xem Ví dụ 4, ý f)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } I &= \ln|x| + \ln(x^2 + 1) + \arctan x - \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \arctan x + C = \\ &= \ln|x(x^2 + 1)| + \frac{1}{2} \arctan x - \frac{x}{2(x^2+1)} + C. \end{aligned}$$

$$c) \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}.$$

$$\text{Giải: Phân tích } \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}.$$

Quy đồng mẫu số chung và cho tử số bằng nhau, ta được

$$x^2 + 1 = A(x-1)^3 + B(x-1)^2(x+3) + C(x-1)(x+3),$$

$$x^2 + 1 = (A+B)x^3 + (-3A+B+C)x^2 + (3A-5B+2C+3D).$$

Đồng nhất hệ số hai vế đẳng thức, ta có

$$A+B=0, -3A+B+C=1, 3A-5B+2C+D=0, -A+3B-3C+3D=1,$$

$$\text{ta được } A = \frac{-5}{32}, B = \frac{5}{32}, C = \frac{3}{8}, D = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Khi đó } \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{-5}{32(x+3)} + \frac{5}{32(x-1)} + \frac{3}{8(x-1)^2} + \frac{1}{2(x-1)^3}.$$

$$\text{Ví dụ 8. (2024) } \int \frac{2x^2+2x+6}{(x^2+1)(x+2)} dx.$$

2.1.6. Tích phân hàm vô tỷ

$$1) \text{ Tích phân dạng: } \int R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}) dx.$$

Gọi k là mẫu số chung nhỏ nhất của các phân số $\frac{m}{n}, \dots, \frac{p}{q}$; đặt $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, ta sẽ đưa được về tích phân hàm phân thức hữu tỷ.

Ví dụ 9. Tính

$$a) I = \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx \quad (x > 1)$$

$$b) (2020N1) I = \int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

$$c) (2019N1) I = \int (\sqrt{2x-3} + |1-x^2|^{-1/2}) dx$$

$$d) (2017N2) I = \int \frac{(\sqrt{x-2}\sqrt[3]{x})^2}{x} dx.$$

$$2) \text{ Tích phân dạng: } \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$$

Sử dụng phép thế Euler sẽ đưa tích phân đã cho về tích phân các hàm phân thức hữu tỷ:

$$+ \text{ Nếu } a > 0 \text{ đặt } \sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{ax} \text{ (hoặc } \sqrt{ax^2+bx+c} = t + \sqrt{ax}).$$

$$+ \text{ Nếu } c > 0 \text{ đặt } \sqrt{ax^2+bx+c} = xt - \sqrt{c} \text{ (hoặc } \sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}).$$

$$+ \text{ Nếu } ax^2+bx+c \text{ có hai nghiệm thực khác nhau } x_1, x_2 \text{ thì } ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2),$$

$$\text{đặt } \sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1) \text{ hoặc } \sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_2).$$

Ví dụ 10. Tính

$$a) I = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}. \quad b) I = \int \frac{(x-1)dx}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}. \quad c) (2023N1) I = \int \frac{7dx}{\sqrt{3-2x-5x^2}}.$$

Một số trường hợp đặc biệt

$$a) I = \int \sqrt{ax^2+bx+c} dx, \text{ ta biến đổi } ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

$$\text{Đặt } t = x + \frac{b}{2a} \Rightarrow dx = dt \text{ và } I = \int \sqrt{at^2 + c - \frac{b^2}{4a}} dt. \quad \text{Khi đó } I \text{ có dạng}$$

$$\int \sqrt{m^2 - y^2} dy \text{ hoặc } \int \sqrt{y^2 \pm m^2} dy.$$

$$b) I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \text{ tương tự a), ta đưa về dạng } \int \frac{dy}{\sqrt{m^2-y^2}} \text{ hoặc } \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 \pm m^2}}.$$

$$c) I = \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}, \text{ đặt } x - a = \frac{1}{t}.$$

3) **Tích phân dạng** $\int x^m(a + bx^n)^p dx$, với $m, n, p \in \mathbb{Q}$. Nhà toán học Nga Trêbusep đã chứng minh tích phân trên biểu diễn được bằng các hàm số sơ cấp chỉ trong ba trường hợp sau:

a) p là số nguyên, đặt $x = t^s$, với s là bội chung nhỏ nhất của mẫu số của các phân số m và n , tích phân sẽ được đưa về tích phân hàm phân thức hữu tỷ.

b) $\frac{m+1}{n}$ là số nguyên, đặt $ax + bx^n = t^s$, với s là mẫu số của phân số p .

c) $\frac{m+1}{n} + p$ là số nguyên, đặt $ax^n + b = t^s$, với s là mẫu số của phân số p .

Ví dụ 11. Tính

$$a) I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1+\sqrt[3]{x^2})}}.$$

$$b) I = \int \frac{x^3 dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$c) I = \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}.$$

2.1.7. Tích phân hàm lượng giác $I = \int R(\sin x, \cos x) dx$

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2}, -\pi < x < \pi, \text{ ta có } \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\text{Từ } t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \arctan t \Rightarrow x = 2\arctan t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Khi đó ta viết tích phân I dưới dạng tích phân hàm phân thức hữu tỷ $I = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$

Ví dụ 12. Tính

$$a) I = \int \frac{dx}{\sin x}.$$

$$b) I = \int \frac{dx}{3 \cos x + 4 \sin x}.$$

Trong một số trường hợp đặc biệt khi tính tích phân dạng $\int R(\sin x, \cos x) dx$ có thể được tính đơn giản hơn.

+ Nếu $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ lẻ đối với $\sin x$ thì đặt $\cos x = t$.

+ Nếu $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ lẻ đối với $\cos x$ thì đặt $\sin x = t$.

+ Nếu $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ chẵn đối với $\sin x$ và $\cos x$ thì đặt $\tan x = t$.

Ví dụ 13. Tính

$$a) (2020N1) \text{ Tính } I = \int \frac{\cos^3 x}{2 + \sin x} dx, \text{ (dạng } R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)).$$

$$b) \text{ Tính } I = \int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2} dx, \text{ (dạng } R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)).$$

$$c) \text{ Tính } I = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx \text{ (dạng } R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)).$$

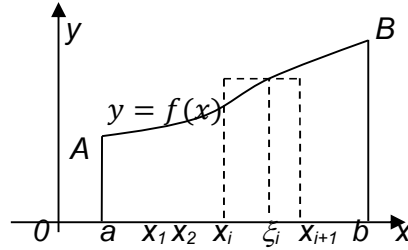
Chú ý: Mọi hàm sơ cấp liên tục đều có nguyên hàm tức là có tích phân bất định, tuy nhiên nhiều tích phân biết chắc chắn có nguyên hàm nhưng nguyên hàm không có dưới dạng hàm số sơ cấp, chẳng hạn: $\int \frac{e^x}{x} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int e^{-x^2} dx, \int \cos x^2 dx, \dots$

2.2. Tích phân xác định

2.2.1. Bài toán tính diện tích hình thang cong

Xét bài toán: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, dương trên đoạn $[a, b]$. Miền giới hạn bởi các đường $x = a, x = b, y = 0, y = f(x)$ được gọi là hình thang cong. Hãy tính diện tích hình đó (Hình 5.1).

Trước hết bằng phương pháp gần đúng chia $[a, b]$ thành n phần, không nhất thiết bằng nhau, bởi các điểm chia $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.



Hình 5.1

Ký hiệu $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ là độ dài đoạn $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Tính diện tích hình thang cong thứ i , một cách gần đúng, bằng cách lấy một điểm tùy ý ξ_i trên đoạn $[x_i, x_{i+1}]$, ta coi diện tích hình thang cong thứ i gần bằng diện tích hình chữ nhật có đáy Δx_i và chiều cao là $f(\xi_i)$, với $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Ký hiệu S_n là tổng diện tích của n hình chữ nhật đó, tức là $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$.

Khi đó $S_n \approx S$ với S là diện tích hình thang cong $AabB$.

Ký hiệu $\lambda = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta x_i$. Nếu $n \rightarrow \infty$, sao cho $\lambda \rightarrow 0$, mà S_n tiến dần đến một giới hạn hữu hạn, không phụ thuộc cách chia đoạn $[a, b]$, cách chọn điểm ξ_i thì giới hạn đó được gọi là diện tích hình thang cong $AabB$.

2.2.2. Định nghĩa tích phân xác định

Định nghĩa 2.2.1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a, b]$. Chia đoạn $[a, b]$ thành n phần bất kỳ bởi các điểm chia:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Đặt $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$), trên mỗi đoạn $[x_i, x_{i+1}]$, lấy một điểm ξ_i tùy ý ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$).

Lập tổng $I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$, (I_n gọi là tổng tích phân).

Nếu khi $n \rightarrow \infty$, sao cho $\lambda = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta x_i \rightarrow 0$ mà I_n dẫn tới một giới hạn hữu hạn I , không phụ thuộc cách chia đoạn $[a, b]$, cách chọn các điểm $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ thì ta gọi I là tích phân xác định của hàm $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$.

Ký hiệu $I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$, trong đó a, b gọi là cận lấy tích phân, **a là cận dưới, b là cận trên**.

Nếu tồn tại $\int_a^b f(x) dx$ thì ta nói hàm số $f(x)$ khả tích trên đoạn $[a, b]$.

Từ Định nghĩa 5.2.1, ta thấy rằng nếu $f(x) \geq 0$ trên đoạn $[a, b]$ thì diện tích S của hình thang cong $AabB$ (Hình 5.1) là $S = \int_a^b f(x) dx$.

Đó cũng là ý nghĩa hình học của tích phân xác định.

Chú ý: 1) Nếu $a < b$ thì $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$, Nếu $a = b$ thì $\int_a^b f(x) dx = 0$.

2) Tích phân xác định là một số, nó không phụ thuộc vào biến số lấy tích phân, tức là

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du.$$

Ví dụ 1. Tính $\int_0^1 e^x dx$.

Giải: Ta có hàm $f(x) = e^x$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$.

+ Chia đoạn $[0; 1]$ thành n phần bằng nhau bởi các điểm chia $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < 1 \Rightarrow \Delta x_i = \frac{1}{n}$,

+ Lấy $\xi_i = \frac{i}{n} \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$, ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$). lập tổng $I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} e^{\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{n} \left(e^0 + e^{\frac{1}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} \right) = \frac{1-e}{n(1-e^{\frac{1}{n}})} = \frac{e-1}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}.$$

+ Khi $n \rightarrow \infty$ thì $I_n \rightarrow e - 1$ vì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (e^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1$$

Vậy $\int_0^1 e^x dx = e - 1$.

Ví dụ 2. Tính giới hạn $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{4n^2+2^2}} + \dots + \frac{n-1}{\sqrt{4n^2+(n-1)^2}} \right)$.

Giải: Ta có hàm $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$, $x \in [0,1]$, $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ nên khả tích.

+ Chia đoạn $[0;1]$ thành n phần bằng nhau $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < 1 \Rightarrow \Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n}$

+ Chọn $\xi_i = \frac{i}{n} \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right]$, ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$). Ta có

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\frac{i}{n}}{\sqrt{\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 4}} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{\sqrt{4n^2 + i^2}} \frac{1}{n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{\sqrt{4n^2 + i^2}} \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx = \int_0^1 \frac{d(x^2+4)}{2\sqrt{x^2+4}} = \sqrt{x^2+4} \Big|_0^1 = \sqrt{5} - 2$$

Lưu ý: $I = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{4n^2+2^2}} + \dots + \frac{n-1}{\sqrt{4n^2+(n-1)^2}} \right) \right] \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$

2.2.3. Tính chất của tích phân xác định

Định lý 2.2.1. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ thì $f(x)$ khả tích trên đoạn đó.

Định lý 2.2.2. Nếu hàm số $f(x)$ bị chặn và có một số hữu hạn điểm gián đoạn loại 1 trên đoạn $[a,b]$ thì $f(x)$ khả tích trên đoạn đó.

Các định lý này có thể chứng minh bằng định nghĩa (ở đây không chứng minh).

Từ định nghĩa tích phân xác định ta có một số tính chất sau:

1) Nếu các hàm số $f(x), g(x)$ khả tích trên đoạn $[a,b]$, thì tổng $f(x) \pm g(x)$ cũng khả tích trên đoạn đó và

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

2) Nếu hàm số $f(x)$ khả tích trên đoạn $[a,b]$ thì $Cf(x)$, (C -const) cũng khả tích trên đoạn đó và $\int_a^b Cf(x) dx = C \int_a^b f(x) dx$.

3) Nếu hàm số $f(x)$ khả tích trên đoạn lớn nhất trong số các đoạn: $[a,b], [a,c], [c,b]$ thì

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

4) Nếu các hàm số $f(x), g(x)$ khả tích và $f(x) \geq g(x)$ trên đoạn $[a,b]$ thì

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

5) Nếu hàm số $f(x)$ khả tích trên đoạn $[a,b]$ thì $|f(x)|$ cũng khả tích trên đoạn đó và

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

6) Nếu hàm số $f(x)$ khả tích trên đoạn $[a,b]$ thì

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

trong đó m và M là giá trị bé nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a,b]$.

Định lý 2.2.3. (Định lý giá trị trung bình)

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì khi đó $\exists c \in [a, b]$ sao cho $\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a)$,

hoặc ta viết $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(c)$ với $a < b$.

Ví dụ 3. Ước lượng tích phân $\int_{10}^{18} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}}$.

Giải: Vì $|\cos x| \leq 1$, nên khi $x \geq 10$ ta có bất đẳng thức

$$\left| \int_{10}^{18} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}} dx \right| \leq \int_{10}^{18} \left| \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}} \right| dx < 8 \cdot 10^{-2} < 10^{-1}, \quad \text{Vậy } \left| \int_{10}^{18} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}} dx \right| < 10^{-1}.$$

2.2.4. Cách tính tích phân xác định

Cho hàm số $f(x)$ khả tích trên đoạn $[a, b]$, xét hàm số $\varphi'(x) = \int_a^x f(t)dt$, $a \leq x \leq b$. (3)

Định lý 2.2.4. Nếu hàm số $f(t)$ khả tích trên đoạn $[a, b]$ thì $\varphi'(x)$ là một hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$.

Định lý 2.2.5. Nếu hàm số $\varphi'(t)$ liên tục tại $t = x \in [a, b]$ thì $\varphi'(x)$ có đạo hàm tại x và

$$\varphi'(x) = \left[\int_a^x f(t)dt \right]' = f(x).$$

Ta viết đẳng thức $\varphi'(x) = f(x)$ dưới dạng $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$ (4)

Công thức (4) có ý nghĩa quan trọng, nếu hàm số $f(t)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì khi đạo hàm theo cận trên x của tích phân (3) luôn bằng hàm số dưới dấu tích phân trên đoạn đó.

Định lý 2.2.6. (Liên hệ giữa tích phân xác định và nguyên hàm)

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của nó thì ta có

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (5a)$$

Ta thường viết $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$. (5b)

Công thức (5b) gọi là **công thức Newton – Leibnitz**.

Ví dụ 4. Tính

a) $I = \int_a^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1$.

b) (2019N2) $I = \int_2^3 \operatorname{arccot} \sqrt{3-x} dx$.

c) (2020N2) $I = \int_0^1 \ln^2(3x+1) dx$

d) (2018N1) $I = \int_0^5 \sqrt{|x^2-9|} dx$

e) (2018N1) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{3 \sin x + 4 \cos x}{4 \sin x + 3 \cos x} dx$

Chú ý: Trong trường hợp cận lấy tích phân là những hàm số khả vi $\alpha(x), \beta(x)$ trên đoạn $[a, b]$, thì

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x). \quad (6)$$

Chẳng hạn $\frac{d}{dx} \int_{\cos x}^{x^2} t dt = x^2 \cdot (2x) - (\cos x) \cdot (-\sin x) = 2x^3 + \cos x \cdot \sin x$.

Công thức (6) là mở rộng của công thức (4).

2.2.5. Phương pháp đổi biến số trong tích phân xác định

Định lý 2.2.7. Xét tích phân $\int_a^b f(x)dx$, với $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$.

Giả thiết phép đổi biến $x = \varphi(t)$ thỏa mãn:

1) $\varphi(t)$ khả vi liên tục trên đoạn $[t_1, t_2]$.

2) $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$.

3) Khi t biến thiên trên đoạn $[t_1, t_2]$ thì x biến thiên trên đoạn $[a, b]$.

Khi đó ta có: $\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt$ (7)

Chú ý: 1) Thuận lợi của công thức (7) là sau khi đổi biến không phải trở lại biến cũ.

2) Nếu tích phân có dạng $\int_a^b f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) dx$ thì ta có thể đặt $t = \varphi(x)$, với điều kiện $\varphi'(x)$ liên tục, đơn điệu và có đạo hàm $\varphi'(x) \neq 0$, liên tục trên $[a, b]$.

Ví dụ 5. Tính

a) $I = \int_0^1 x\sqrt{1+x} dx.$

b) $I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$

c) $I = \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}.$

d) $I = \int_0^{\pi/2} \sin^{10} x \cos^3 x dx$

Chú ý: Ta có $\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } f(x) \text{ là hàm số lẻ} \\ 2 \int_0^a f(x) dx & \text{nếu } f(x) \text{ là hàm số chẵn} \end{cases}$

Ví dụ 6. Tính

a) Tính $I = \int_{-1}^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

b) Tính $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx.$

2.2.6. Phương pháp tích phân từng phần

Định lý 2.2.8. Giả sử các hàm số $u(x)$ và $v(x)$ khả vi liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)] \Big|_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x) dx \quad (8a)$$

Đẳng thức (8a) thường được viết dưới dạng

$$\int_a^b u dv = (u \cdot v) \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (8b)$$

Chú ý: Khi tính tích phân $\int_a^b f(x) dx$ bằng phương pháp tích phân từng phần ta biến đổi $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u(x) dv(x)$ sao cho $\int_a^b v(x) du(x)$ phải được tính đơn giản hơn $\int_a^b u(x) dv(x)$.

Ví dụ 7. Tính

a) $I = \int_0^1 x e^{-x} dx;$

b) Tính $I = \int_1^e \ln x dx.$

c) Tính $I = \int_1^e \frac{\ln x dx}{x^3 \sqrt{x}}. (2021N3)$

d) Tính $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx.$

e) Tính $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx. (2022N3)$

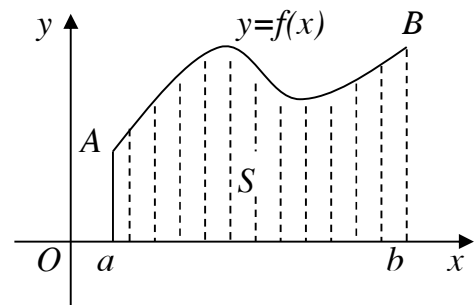
f) (2020-2) Tìm a để tích phân $\int_0^a 3^x \arctan(5 - 3x) dx$ đạt giá trị lớn nhất.

2.3. Ứng dụng hình học của tích phân xác định

2.3.1. Diện tích miền phẳng

1) Trong hệ tọa độ Đề các

Theo ý nghĩa hình học của tích phân xác định, thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi các đường thẳng $x = a, x = b, a < b; y = 0$ và cung đồ thị $y = f(x)$ với $f(x) \geq 0$ (Hình 5.2) là $S = \int_a^b f(x) dx$ (9)



Hình 5.2

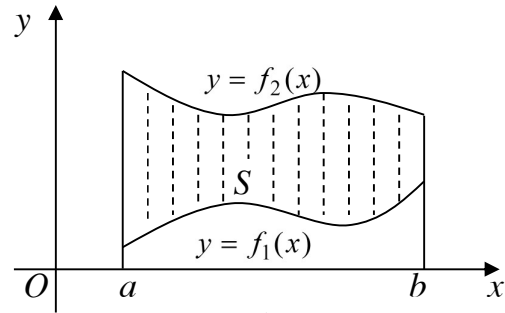
Nếu $f(x)$ là hàm số bất kỳ liên tục trên đoạn $[a, b]$, ta có $S = \int_a^b |f(x)| dx. \quad (10)$

Trường hợp hình phẳng giới hạn bởi

$$f_1(x) \leq y \leq f_2(x), a \leq x \leq b. \quad (\text{Hình 5.3})$$

Ta có

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx. \quad (11a)$$



Hình 5.3

Tổng quát

Trường hợp hình phẳng giới hạn bởi $y = f_1(x); y = f_2(x), a \leq x \leq b$. $f_1(x), f_2(x) \in C[a, b]$	Ta có $S = \int_a^b f_2(x) - f_1(x) dx \quad (11b)$
Trường hợp hình phẳng giới hạn bởi $x = g_1(y); x = g_2(y), c \leq y \leq d$ $g_1(y), g_2(y) \in C[c, d]$	Ta có $S = \int_c^d g_1(y) - g_2(y) dy \quad (11c)$
Trường hợp hình phẳng giới hạn bởi $a \leq x \leq b; y = 0$. $x = \psi(t), y = \phi(t)$	Ta có $S = \int_{t_1}^{t_2} \phi(t) \psi'(t) dt \quad (11d)$

Trong đó giả thiết rằng phương trình $\psi(t) = a, \phi(t) = b$ có nghiệm duy nhất là t_1, t_2 và $\phi, \psi, \psi' \in C[t_1, t_2]$.

Ví dụ 1. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2$ và đường thẳng $x + y = 2$.

Trường hợp, đường cong cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t)$.

Theo công thức (9), thay $y = f(x)$ bởi $y = y(t), dx = x'(t)dt$ hai cận a, b được thay bởi t_1, t_2 ứng với $a = x(t_1), b = x(t_2)$, ta có $S = \int_{t_2}^{t_1} |y(t) \cdot x'(t)| dt. \quad (12)$

Ví dụ 2. Tính diện tích của hình

$$x = a \cos t, y = b \sin t, a > 0, b > 0.$$

2) Trong hệ tọa độ cực

Diện tích hình quạt cong.

Xét hình phẳng là hình quạt giới hạn bởi các đường $r = r(\varphi)$ và các tia $y = \alpha, y = \beta$, Hình 5.5).

Chia hình phẳng thành n quạt nhỏ bởi các tia

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n = \beta.$$

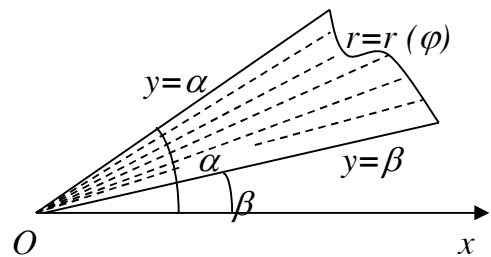
Đặt $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$), $\lambda = \max \Delta\varphi_i$ ($0 \leq i \leq n-1$).

Hình quạt con nằm giữa hai tia φ_i, φ_{i+1} , có diện tích được coi gần bằng hình quạt có bán kính $r(\xi_i)$ với $\varphi_i \leq \xi_i \leq \varphi_{i+1}$, ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$).

$$\text{Lập tổng } S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} r^2(\xi_i) \cdot \Delta\varphi_i \approx S.$$

Chuyển giới hạn S_n khi $\lambda \rightarrow 0$ ta được diện tích hình quạt cong là

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi. \quad (13)$$



Hình 5.5

Ví dụ 3. Tính diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đường hoa hồng bốn cánh

$$r = a \sin 2\varphi, \quad (a > 0),$$

Giải: Phần tám thứ nhất của diện tích cần tìm tương ứng với sự biến đổi của φ từ 0 đến $\frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{Vì vậy} \quad S &= 8 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \sin^2 2\varphi d\varphi = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2\varphi d\varphi = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi = \\ &= 2a^2 \cdot \left(\varphi - \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2 \pi}{2} \quad (\text{đvtt}). \end{aligned}$$

2.3.2. Thể tích

1) Trường hợp tổng quát

Cho vật thể giới hạn bởi mặt cong kín và nằm giữa hai mặt phẳng $x = a, x = b$, (Hình 5.7).

Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại x cắt vật thể với thiết diện có diện tích $S = S(x)$.

Chia vật thể thành n phần bởi các mặt phẳng

$$x = x_i, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Đặt $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \lambda = \max \Delta x_i, 0 \leq i \leq n-1$.

Trên mỗi đoạn $[x_i, x_{i+1}]$ lấy một điểm tùy ý

ξ_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$). Thể tích của phần vật thể thứ i nằm giữa hai mặt phẳng $x = x_i, x = x_{i+1}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) được coi gần bằng thể tích hình trụ có đáy có diện tích $S(\xi_i)$, chiều cao Δx_i ,

khi đó thể tích vật thể được coi gần bằng $V_n = \sum_{i=0}^{n-1} S(\xi_i) \cdot \Delta x_i \approx V$

Chuyển qua giới hạn V_n khi $\lambda \rightarrow 0$, ta được thể tích của vật thể là $V = \int_a^b S(x) dx$. (14)

Ví dụ 4. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi mặt elipxoid, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Giải: Tính diện tích S của thiết diện vuông góc với trục Ox tại điểm x , ta có

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad (\text{xem } x \text{ như là hằng số}), \Rightarrow \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1.$$

Ta có diện tích thiết diện $S = S(x)$ và $S(x) = \pi \cdot b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$.

Vậy thể tích của vật thể là

$$V = \int_{-a}^a S(x) dx = \int_{-a}^a \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi bc \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi abc \quad (\text{đvtt}).$$

Đặc biệt $a = b = c = R$ thì elipxoid là mặt cầu bán kính R và thể tích hình cầu đó là: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

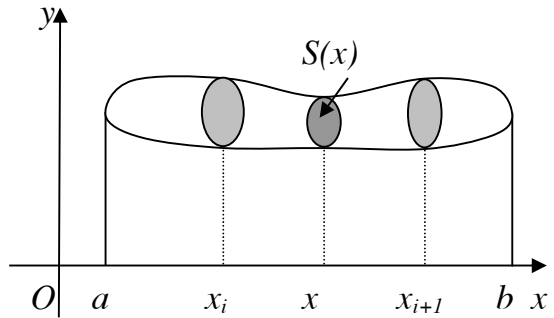
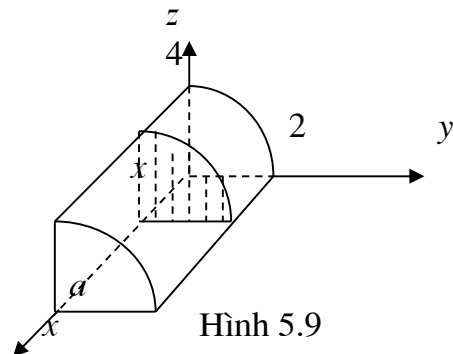
Ví dụ 5. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt $z = 4 - y^2, x = a, (a > 0)$ và các mặt phẳng toạ độ, lấy miền $x > 0, y > 0$, (Hình 5.9).

Giải: Cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại x , ta được thiết diện có diện tích là

$$S(x) = \int_0^2 (4 - y^2) dy = \left(4y - \frac{y^3}{3}\right) \Big|_0^2 = \frac{16}{3}.$$

Vậy thể tích của vật thể là

$$V = \int_0^a S(x) dx = \int_0^a \frac{16}{3} dx = \frac{16a}{3} \quad (\text{đvtt}).$$

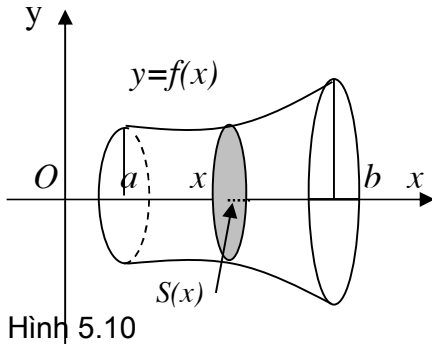


Hình 5.9

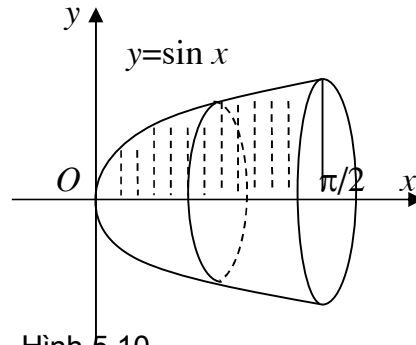
2) Thể tích vật tròn xoay

Cho vật thể tròn xoay được tạo bởi hình thang cong $0 \leq y \leq f(x)$, $0 \leq x \leq b$, quay xung quanh trục Ox , (Hình 5.10). Khi đó $S(x) = \pi f^2(x)$ và $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. (15)

Nếu vật thể tròn xoay được tạo bởi hình thang cong $0 \leq x \leq \phi(y)$, $c \leq y \leq d$, quay xung quanh trục Oy thì thể tích của nó là $V = \pi \int_c^d \phi^2(y) dy$. (16)



Hình 5.10



Hình 5.10

Ví dụ 6. Tính thể tích của vật thể được tạo ra khi hình giới hạn bởi đường cong $y = \sin x$ và các đường $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 0$.

a) Quay quanh trục Ox . (Hình 5.11)

b) Quay quanh trục Oy . (Hình 5.12)

Giải: a) Ta có $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2 \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$

(đvtt).

b) Ta có $y = \sin x \Rightarrow x = \arcsin y \Rightarrow V = V_1 - V_2$

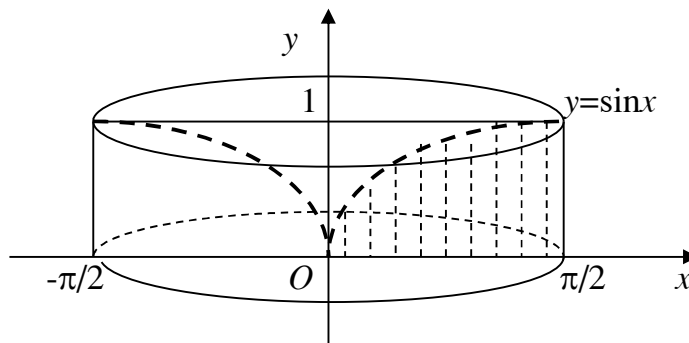
Trong đó: V_1 là hình trụ đáy là hình tròn tâm O , bán kính $r = \frac{\pi}{2}$, chiều cao là $h = 1$ có thể tích

$$V_1 = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \frac{\pi^2}{4} \cdot 1 = \frac{\pi^3}{4},$$

V_2 là vật thể tròn xoay của hình giới hạn bởi $x = \arcsin y, y = 1, x = 0$, quay xung quanh trục Oy có thể là $V_2 = \pi \int_0^1 x^2 dy = \pi \int_0^1 \arcsin^2 y dy$.

Đặt $u = \arcsin 2y, dv = dy \Rightarrow du = \frac{2 \arcsin y}{\sqrt{1-y^2}} dy, v = y$, ta có

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \left[y \arcsin y \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2 \arcsin y}{\sqrt{1-y^2}} y dy \right] = \pi \left[\frac{\pi}{2} + \int_0^1 \arcsin y d(\sqrt{1-y^2}) \right] = \\ &= \frac{\pi^2}{2} + \pi \left[\left(\sqrt{1-y^2} \cdot \arcsin y \Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1-y^2} \cdot \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \right) \right] = \frac{\pi^2}{2} + \pi \left[0 - \int_0^1 dy \right] = \frac{\pi^2}{2} - \pi. \end{aligned}$$



Hình 5.12

Vậy thể tích vật thể cần tính là $V = V_1 - V_2 = \frac{\pi^3}{4} - \frac{\pi^2}{2} + \pi$ (đvtt).

Ví dụ 7. (2024N1) Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo ra khi quay hình giới hạn bởi đường $y = (x - 1)(3 - x)$, $y = 0$ quay quanh trục Oy một vòng.

Ví dụ 8. (2019N1) Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo ra khi quay hình giới hạn bởi đường $y = x^2 - 3x$, $y = 0$ quay quanh trục Oy một vòng.

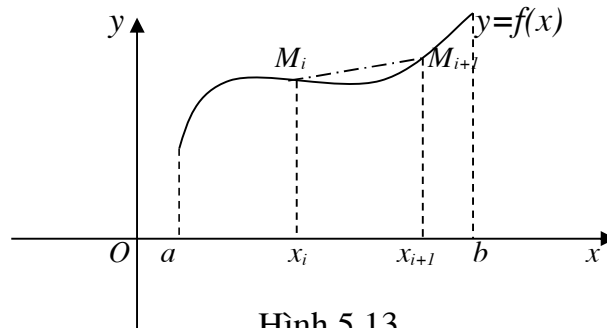
Ví dụ 9. (2020N1) Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo ra khi quay hình giới hạn bởi đường $y = x^2$, $y = 1$ quay quanh trục $y = 2$ một vòng.

2.3.3. Diện tích mặt tròn xoay

Cho hàm $y = f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a, b]$, chia $[a, b]$ thành n phần bởi các điểm chia

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Các đường thẳng $x = x_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), cắt đường cong $y = f(x)$ tại M_i



Hình 5.13

Ký hiệu S_i là diện tích xung quanh của hình nón cụt xoay được tạo bởi đoạn thẳng $M_i M_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ quay xung quanh trục Ox . (Diện tích S_i xấp xỉ diện tích xung quanh của hình tròn xoay tạo bởi cung $M_i M_{i+1}$ quay xung quanh trục Ox). Ta có

$$S_i = \pi [f(x_i) + f(x_{i+1})] M_i M_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

Trong đó $M_i M_{i+1} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + [f(x_{i+1}) - f(x_i)]^2}$.

Theo định lý Lagrange, tồn tại số thực $c_i \in (x_i, x_{i+1})$, sao cho $f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(c_i)(x_{i+1} - x_i) = f'(c_i) \Delta x_i$. Do đó $S_i = \pi [f(x_i) + f(x_{i+1})] \cdot \sqrt{1 + f'(c_i)^2} \Delta x_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, và

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} S_i = \sum_{i=0}^{n-1} \pi [f(x_i) + f(x_{i+1})] \cdot \sqrt{1 + f'(c_i)^2} \Delta x_i.$$

$$\text{Đặt } I_n = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i.$$

Chuyển qua giới hạn khi $n \rightarrow \infty$, ($\max \Delta x_i \rightarrow 0$) ta có I_n tiến dần tới S hữu hạn (nếu có). Khi đó diện tích mặt tròn xoay tạo bởi cung $y = f(x)$, ($a \leq x \leq b$) quay xung quanh trục Ox là

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (17)$$

Trường hợp đường cong cho bởi phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$, $y(t) \geq 0$, $\alpha \leq t \leq \beta$ quay xung quanh trục Ox thì diện tích mặt tròn xoay là:

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \quad (18)$$

Ví dụ 10. Tính diện tích của mặt tròn xoay được tạo bởi cung $y = \sin 2x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, quay xung quanh trục Ox .

Giải: Ta có $S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sqrt{1 + (\sin 2x)^2} dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sqrt{1 + 4 \cos^2 2x} dx$.

Đặt $\cos 2x = \frac{t}{2} \Rightarrow \sin 2x dx = -\frac{1}{4} dt$, $x = 0 \Rightarrow t = 2$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = -2$. Khi đó

$$S = 2\pi \int_2^{-2} \sqrt{1+t^2} \left(-\frac{1}{4} dt\right) = \frac{\pi}{2} \int_{-2}^2 \sqrt{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} \left[\frac{t}{2} \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \right]_{-2}^2 =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(2\sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} \right) = \frac{\pi}{2} [2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5}+2)] \quad (đvdt).$$

Ví dụ 11. (2019N1) Quay đường $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 4, -6 \leq x \leq 6$, quay xung quanh trục Ox . Tính diện tích của mặt tròn xoay được tạo ra.

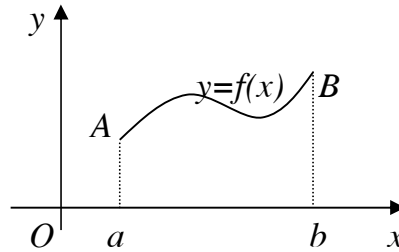
Ví dụ 12. (2019N1) Tính diện tích của mặt tròn xoay được tạo bởi đường tròn $x^2 + (y-2)^2 = 1$ quay xung quanh trục Ox .

Ví dụ 13. Tính diện tích của mặt tròn xoay được tạo bởi cung elip $y = \frac{1}{2} \sqrt{36-x^2}, -6 \leq x \leq 6$, quay xung quanh trục Ox .

2.3.4. Độ dài đường cong phẳng

+ Cho cung AB là đồ thị của hàm số $y = f(x), a \leq x \leq b$. Khi đó độ dài cung AB được tính theo công thức

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)} dt. \quad (19)$$



Hình 5.14

Phương pháp chứng minh công thức (19) giống như (17).

+Trường hợp đường cong cho dưới dạng tham số $x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta$.	Ta có $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \quad (20)$
+Trường hợp đường cong cho trong hệ tọa độ cực $r = r(\phi), \alpha \leq \phi \leq \beta$.	Ta có $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\phi) + r'^2(\phi)} d\phi. \quad (21)$

Ví dụ 14. Tính độ dài cung của đường cong $y = \sqrt{2-x^2}, |x| \leq 1$.

Ví dụ 15. Tính độ dài của đường asteroit $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, a > 0$.

Ví dụ 16. Tính độ dài đường cong cardioid $r = a(1 + \cos \phi)$.

Tham khảo

1. (2021-2) Tính thể tích của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 1+x; y = \sqrt{1-x^2}$ quanh trục Ox một vòng.

2. (2019-2) Tính diện tích của mặt tròn xoay tạo bởi đường tròn $x^2 + (y+2)^2 = 1$ quay quanh trục Ox

3. (2022-2) Tính diện tích của mặt tròn xoay tạo nên khi quay đường $y = \sin x; \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ quanh trục Ox .

4. (2022-2) Sử dụng sơ đồ tổng tích phân để xây dựng công thức tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi $y = f(x), y = 0, x = 1; x = 5$ biết hàm $f(x)$ liên tục.

5. (2023-2) Tính thể tích của vật thể tròn xoay tạo nên khi quay hình giới hạn bởi đường cong $y = \sin x; 0 \leq x \leq \pi$ và $y = 0$ quanh đường thẳng $y = 1$.

2.4. Tích phân suy rộng

2.4.1. Tích phân suy rộng có cận vô hạn

Định nghĩa 2.4.1. Giả sử hàm số $f(x)$ xác định $\forall x \geq a$, khả tích trên đoạn $[a, A]$ ($A > a$, A bất kỳ).

Ta gọi $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx$ là tích phân suy rộng có cận vô hạn của hàm $f(x)$ và ký hiệu là $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Vậy

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx. \quad (22)$$

Nếu vế phải (22) tồn tại hữu hạn là l thì ta nói tích phân suy rộng (22) **hội tụ** và có giá trị là l ; trong trường hợp ngược lại ta nói tích phân (22) **phân kỳ**.

Tương tự ta cũng có

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^b f(x)dx &= \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^b f(x)dx, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^c f(x)dx + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_c^A f(x)dx. \end{aligned}$$

Như vậy để tính tích phân suy rộng có cận vô hạn ta tính

$$\int_a^A f(x)dx = F(x) \Big|_a^A = F(A) - F(a)$$

và tìm giới hạn $\lim_{A \rightarrow +\infty} [F(A) - F(a)]$.

Trong kỹ thuật, nhiều tích phân suy rộng chỉ cần biết nó có hội tụ hay không, từ đó tìm cách để tính giá trị gần đúng của nó. Ta có tiêu chuẩn sau

Tiêu chuẩn so sánh: Cùng với tích phân (22) ta xét tích phân $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, (23)

trong đó $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \geq a$, $g(x)$ liên tục trên $[a, A]$.

Nếu tích phân (23) hội tụ thì tích phân (22) hội tụ; nếu tích phân (22) phân kỳ thì tích phân (23) phân kỳ.

Chú ý:

1) Từ tiêu chuẩn so sánh, giả sử $f(x) \geq 0$, khi $x \rightarrow \infty$, $f(x)$ là VCB bậc $\lambda > 0$ so với VCB $\frac{1}{x}$, nghĩa là $f(x) \sim \frac{1}{x^\lambda}$ khi $x \rightarrow \infty$. Nếu $\lambda > 1$ thì tích phân (22) hội tụ, còn $\lambda \leq 1$ thì tích phân (22) phân kỳ.

2) Trường hợp $f(x)$ là hàm số có dấu bất kỳ khi $x \geq a$ và $f(x)$ là VCB khi $x \rightarrow \infty$, ta xét:

+Nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và khi đó ta nói tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối và

$$|\int_a^{+\infty} f(x)dx| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

+Nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kỳ và $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì ta nói tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **bán hội tụ**.

Ví dụ 1. Tính các tích phân suy rộng sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}; & \quad \text{b) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}; & \quad \text{c) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(e^x + 1)^2} \quad (2023N3) \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + 2x^2 + 3x^4}; & \quad \text{b) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x + \sin^2 x}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_1^{+\infty} \frac{1 - 4 \sin 2x}{x^3 + \sqrt[3]{x}} dx; & \quad \text{b) } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } (2023N1) \int_1^{+\infty} (\sqrt{x^3 + 1} - x\sqrt{x}) dx; \\ \text{b) } (2023N1) \int_1^{+\infty} (\ln(1 + x^4) - 4 \ln x) dx; \end{aligned}$$

2.4.2. Tích phân suy rộng của hàm không giới nội

Định nghĩa 2.4.2. Giả sử hàm $f(x)$ không giới nội tại $x = b$, khả tích trên mọi đoạn $[a, b - \varepsilon]$ với $0 < \varepsilon < b - a$.

Ta gọi $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ là tích phân suy rộng của hàm $f(x)$ không giới nội tại cận trên và ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \quad (24)$$

Nếu vế phải (24) tồn tại hữu hạn là I thì ta nói tích phân suy rộng (24) hội tụ và có giá trị là I ; trong trường hợp ngược lại ta nói tích phân (24) phân kỳ.

Tương tự, nếu $f(x)$ không giới nội tại $x = a$ ta có $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$.

Nếu $f(x)$ không giới nội tại $x = c \in (a, b)$ thì

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$$

Tiêu chuẩn so sánh: Cùng với tích phân (24) ta xét tích phân $\int_a^b g(x)dx$, (25) trong đó $g(x)$ không giới nội tại $x = a$, đồng thời $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b)$, $g(x)$ khả tích trên đoạn $[a, b - \varepsilon]$.

+Nếu tích phân (25) hội tụ thì tích phân (24) hội tụ và $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

+Nếu tích phân (24) phân kỳ thì tích phân (25) phân kỳ.

+Từ dấu hiệu so sánh trên ta thấy: khi $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$ thì $x \rightarrow b - 0$ và $f(b) = \infty$ là VCL. Do đó, với $f(x) \geq 0$ và $f(x) \sim \frac{1}{(b-x)^\lambda}$, khi $x \rightarrow b - 0$ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ khi $\lambda < 1$ và phân kỳ khi $\lambda \geq 1$.

Trường hợp hàm số $f(x)$ có dấu bất kỳ $\forall x \in [a, b - \varepsilon]$, ta xét:

+Nếu $\int_a^b |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ và khi đó ta nói tích phân $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối.

+Nếu $\int_a^b |f(x)|dx$ phân kỳ và $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ thì ta nói tích phân $\int_a^b f(x)dx$ bán hội tụ.

Ví dụ 5. Xuất phát từ định nghĩa tính các tích phân sau (hoặc chứng minh chúng phân kỳ)

a) $\int_1^e \frac{dx}{x^3 \ln x}$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$.

Ví dụ 6. Xét sự hội tụ của tích phân sau

a) $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x} - \sin x} dx$. b) (2023N1) $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{1+3x}-1}{x\sqrt{x}} dx$. c) (2022N1) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} \sin(\pi x)}{\sqrt[3]{(1-x)^4}} dx$.

Ví dụ 7. Xét sự hội tụ của tích phân sau:

a) (2024N6) $\int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x^4 \sqrt{x}} dx$.
b) (2024N1) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{e^x + \sin x} - 1} dx$.
c) (2022N1) $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos}{x^{5/2} \sqrt{1+x^2}} dx$.
d) (2020N1) $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{3x^3 + 4x^4}} dx$.

Ví dụ 8. Xét sự hội tụ và tính (trong trường hợp hội tụ) tích phân suy rộng sau:

a) (2024N2) $\int_1^{+\infty} \frac{2 \ln x +}{(x+1)^3} dx$.
b) (2022N3) $\int_1^{+\infty} \frac{2 \arctan x}{x^2} dx$.
c) (2022N1) Tìm số thực $m > 0$ để tích phân suy rộng sau hội tụ $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^m + x^{2m}}$.

Chương 3

HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

3.1. Khái niệm cơ bản

3.1.1. Định nghĩa hàm số hai biến số

Mỗi điểm M thuộc $\mathbf{R}^2$ được ký hiệu (x, y) là cặp số thực có thứ tự (hoặc $M(x, y)$). Khoảng cách giữa hai điểm $M(x_1, y_1)$ và $N(x_2, y_2)$ được xác định bởi công thức

$$d(M, N) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Định nghĩa 3.1.1. Xét tập hợp khác rỗng $D \subseteq \mathbf{R}^2$. Ta gọi ánh xạ $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ là hàm số hai biến số xác định trên D ; D được gọi là miền xác định của hàm số f

Vậy hàm số hai biến f xác định trên D là một phép tương ứng, với mỗi cặp số thực có thứ tự $(x, y) \in D$ cho một và chỉ một số thực mà ta ký hiệu $f(x, y)$, ta cũng gọi $f(x, y)$ là giá trị của f tại (x, y) .

Tập hợp $\{z \in \mathbf{R} \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ gọi là miền giá trị (MGT) của hàm số f .

Ví dụ 1. Tìm miền xác định và miền giá trị của hàm số $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

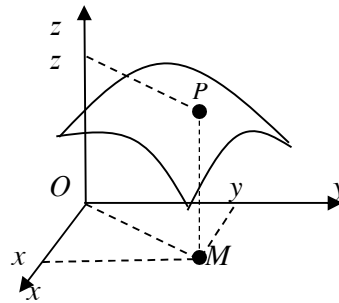
Ví dụ 2. Tìm miền xác định của hàm số $z = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$.

3.1.2. Hàm điểm, biểu diễn hình học của hàm số hai biến số

Giả sử cho hàm số hai biến số $f: (x, y) \mapsto f(x, y)$.

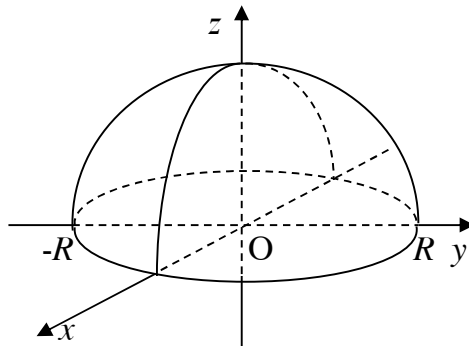
Mỗi cặp (x, y) được biểu diễn bởi một điểm $M(x, y)$ trong mặt phẳng Oxy , nên có thể xem hàm số hai biến số $f(x, y)$ là hàm của điểm $M(x, y)$ được xác định $f: M \mapsto f(M)$.

Về mặt hình học, vẽ hệ trục tọa độ đề các $Oxyz$, với mỗi điểm $M(x, y)$ trong mặt phẳng Oxy cho ứng với một điểm P (Hình 3.1) trong không gian có tọa độ là (x, y, z) , trong đó $z = f(x, y) = f(M)$. Tập hợp các điểm P khi M thay đổi trong miền D của mặt phẳng Oxy gọi là đồ thị (biểu diễn hình học) của hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên miền D . Đồ thị của nó, nói chung là một mặt cong nào đó trong không gian 3 chiều.

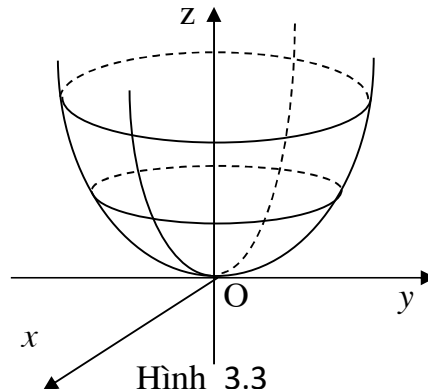


Hình 3.1

Ví dụ 3: Hàm số $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ biểu diễn nửa trên mặt cầu tâm O, bán kính R (Hình 3.2). Hàm số $z = x^2 + y^2$ biểu diễn mặt paraboloid (Hình 3.3).



Hình 3.2



Hình 3.3

3.1.3. Tập hợp mở, tập hợp đóng

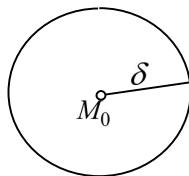
Xét tập hợp các điểm cùng nằm trong một mặt phẳng. Tập hợp D trong mặt phẳng nào đó được gọi là *giới nội* (hay bị chặn) nếu tồn tại một mặt tròn chứa D .

Ta gọi δ - lân cận của điểm M_0 trong mặt phẳng là tập hợp tất cả những điểm M sao cho khoảng cách $d(M, M_0) < \delta$, nói khác đi δ - lân cận của điểm M_0 là phần trong của mặt tròn tâm M_0 , bán kính δ (Hình 3.4).

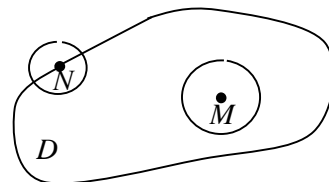
Điểm M của tập hợp D là điểm trong của tập hợp ấy, nếu tồn tại một lân cận nào đó của M nằm hoàn toàn trong D .

Tập hợp D gọi là tập mở (hở) nếu mọi điểm của nó đều là điểm trong.

Điểm N được gọi là điểm biên của tập hợp D nếu mọi lân cận của N đều vừa chứa những điểm thuộc D , vừa chứa những điểm không thuộc D (Hình 3.5).



Hình 3.4



Hình 3.5

Tập hợp D gọi là tập đóng (kín) nếu nó gồm tất cả các điểm trong và các điểm biên của nó.

Ví dụ 4:

a) Cho hàm số $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, $a > 0, b > 0$.

b) Cho hàm số $z = \ln(x + y)$.

Ví dụ 5. Chứng minh tập hợp

a) $E = \{(x_1, x_2): 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$ là mở trong $\mathbf{R}^2$.

b) $E = \{(x_1, x_2): 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ là đóng trong $\mathbf{R}^2$.

c) $E = \{(x_1, x_2): 0 \leq x_1 < 1, 0 \leq x_2 < 1\}$ không là tập mở, cũng không là tập đóng trong $\mathbf{R}^2$.

3.1.4. Hàm số n biến số ($n \geq 3$)

Định nghĩa 3.1.2. Xét tập hợp $\Omega \in \mathbf{R}^n$. ánh xạ $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ được gọi là hàm số n biến số xác định trên tập hợp Ω .

Vậy hàm số n biến số là phép tương ứng, với mỗi bộ n số thực có thứ tự $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ cho ta một và chỉ một số thực z xác định và ký hiệu $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ hay

$$f: (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto z = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Bộ n số thực $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tương ứng với một điểm $M \in \Omega$, nghĩa là $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ gọi là tọa độ của điểm M .

Các khái niệm khoảng cách, lân cận, MXĐ, tập đóng, mở, ... cũng được mở rộng như hàm số hai biến số.

Ví dụ 6:

a) Cho hàm số $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$. MXĐ $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ là tập hợp đóng.

b) Cho hàm số $z = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2})}}$. MXĐ $\Omega = \{(x, y, z) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1\}$ là tập hợp mở.

Để đơn giản ta chỉ nghiên cứu các đặc trưng của hàm số hai biến số, còn hàm số có số biến số ≥ 3 , nếu cần ta sẽ đề cập riêng.

Ví dụ 7. Tìm miền xác định của các hàm số

$$\text{a) } z = \ln(x^2 + y); \quad \text{b) } z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}.$$

Ví dụ 8. Cho hàm số $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2(x + y)}$, tính $f(x + y, x - y)$.

Ví dụ 9. Tìm hàm số $f(x, y)$, biết rằng $f(x + y, x - y) = xy$.

3.2. Giới hạn và liên tục

3.2.1. Giới hạn của hàm số hai biến số

Định nghĩa 3.2.1. Ta nói dãy điểm $\{M_n(x_n, y_n)\}$ dần tới điểm $M_0(x_0, y_0)$, nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$.

Ký hiệu $\rho_n = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}$ là khoảng cách giữa điểm $M_n(x_n, y_n)$ và điểm $M_0(x_0, y_0)$.
Như vậy dãy điểm $\{M_n\}$ dần tới điểm M_0 khi và chỉ khi $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$.

Định nghĩa 3.2.2. Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong một lân cận V nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$ (không cần xác định tại M_0). Ta nói rằng số l là giới hạn của hàm số $f(x, y)$ khi điểm $M(x, y)$ dần tới điểm $M_0(x_0, y_0)$ nếu với mọi dãy điểm $\{M_n(x_n, y_n)\}$ (khác $M_0(x_0, y_0)$) thuộc lân cận V dần tới điểm $M_0(x_0, y_0)$ ta đều có $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(M_n) = l$.

Khi đó ta viết $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = l$ hoặc $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l$.

Hoàn toàn tương tự hàm số một biến số ta cũng định nghĩa các giới hạn sau:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \infty; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = l; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} f(x, y) = \infty; \dots$$

Cũng như khi xét giới hạn của hàm số một biến số, để chứng tỏ số l là giới hạn của hàm số $f(x, y)$ khi $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$, theo định nghĩa 3.2.2, ta phải chứng tỏ mọi dãy điểm $\{M_n\}$ dần tới M_0 thì dãy $\{f(M_n)\}$ tương ứng đều có giới hạn là l . Vì vậy có thể thay bởi định nghĩa khác tương đương sau

Định nghĩa 3.2.3. Ta nói hàm số $z = f(x, y) = f(M)$ có giới hạn là l khi điểm $M(x, y)$ dần tới điểm $M_0(x_0, y_0)$, nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall M(x, y), (x, y) \neq (x_0, y_0), \\ d(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - l| < \varepsilon.$$

Các phép toán về giới hạn của tổng, tích, thương đối với hàm số một biến số vẫn đúng cho hàm số nhiều biến số.

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn:

$$\text{a) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}; \quad \text{b) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Chú ý:

+ Đối với giới hạn l ta cũng có thể chứng tỏ không tồn tại, bằng cách cho $(x, y) \rightarrow (0; 0)$ theo các phương khác nhau của đường thẳng $y = kx, k \neq 0$ bất kỳ.

+ Nói chung các giới hạn lặp (giới hạn theo từng biến riêng biệt) nếu có thì khác nhau và

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right) \neq \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y).$$

Ví dụ 2. (2019N1) Tìm giới hạn

$$\text{a) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{2x^6 + 3y^2}, \quad \text{b) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^5}{x^6 + y^6}$$

Ví dụ 3. Tìm các giới hạn

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 \sin y - y^2 \sin x}{x^2 + y^2} \quad (2024N1); & \quad \text{b) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}. \\ \text{c) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1+x^2+y^2}{x^2} (1 - \cos x); & \quad \text{d) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} (1 + xy)^{\frac{1}{x^2 + xy}}. \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Tìm các giới hạn sau

$$\text{a) } (2021N1) I = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + 2y^4)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}; \quad \text{b) } I = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Ví dụ 5. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x, y) = \frac{1}{x} \sin y + \frac{1}{y} \cos x$ tồn tại giới hạn nhưng không tồn tại giới hạn lặp khi $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$.

Ví dụ 6. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ tồn tại giới hạn lặp nhưng không tồn tại giới hạn kép khi $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$.

3.2.2. Tính liên tục và gián đoạn của hàm số

Định nghĩa 3.2.4. Giả sử hàm số $z = f(x, y) = f(M)$ xác định trong miền $D \subseteq \mathbb{R}^2, M_0(x_0, y_0) \in D$. Hàm số $z = f(M)$ gọi là liên tục tại M_0 , nếu nó xác định tại M_0 và tồn tại giới hạn

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0), \text{ hay } \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0).$$

Hàm số $z = f(x, y)$ được gọi là **liên tục trong miền D** nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc D .

Ví dụ 7. Hàm số $f(x, y) = 3x^2y + xy - 5x$ liên tục tại mọi điểm (x, y) .

Hàm số $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ liên tục $\forall (x, y) \neq (0; 0)$.

Hàm số $z = f(x, y)$ được gọi là **gián đoạn** tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ nếu nó không liên tục tại điểm đó. Như vậy hàm số $z = f(x, y)$ gián đoạn tại điểm M_0 nếu xảy ra một trong các trường hợp sau:

- 1) $z = f(x, y)$ không xác định tại M_0 .
- 2) $z = f(x, y)$ xác định tại M_0 nhưng không tồn tại giới hạn của $f(M)$ khi $M \rightarrow M_0$.
- 3) $z = f(x, y)$ xác định tại M_0 , tồn tại giới hạn $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$ nhưng $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \neq f(M_0)$.

Ví dụ 8. Xét tính liên tục của hàm số $f(x, y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2 + y^2} & \text{khi } (x, y) \neq (0; 0), \\ 0 & \text{khi } (x, y) = (0; 0). \end{cases}$

trong đó α là một hằng số dương.

Ví dụ 9. (2024N6) Xét tính liên tục của hàm số $f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y}{2x^2 + y^2} & \text{khi } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{khi } (x, y) = (0; 0). \end{cases}$

Ví dụ 10. Cho hàm số $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{khi } (x, y) \neq (0; 0), \\ a & \text{khi } (x, y) = (0; 0). \end{cases}$

Với giá trị nào của a thì $f(x, y)$ liên tục tại $(0; 0)$.

3.3. Đạo hàm và vi phân

3.3.1. Đạo hàm riêng cấp một

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên miền D , điểm $M(x_0, y_0) \in D$. Ta định nghĩa đạo hàm của hàm số $f(x, y)$ theo biến x tại điểm (x_0, y_0) như đạo hàm thường của hàm số một biến số $f(x, y_0)$ tại điểm $x = x_0$.

Định nghĩa 3.3.1. Đạo hàm riêng cấp một của hàm số $z = f(x, y)$ theo biến x tại điểm (x_0, y_0) là giới hạn hữu hạn (nếu có):

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Ký hiệu $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ hoặc $z'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)$.

Tương tự ta có đạo hàm riêng cấp một của hàm số $z = f(x, y)$ theo biến y tại điểm (x_0, y_0) là

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Ký hiệu $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ hoặc $f'_y(x_0, y_0)$.

Chú ý: Khi tính đạo hàm riêng của hàm $z = f(x, y)$ theo biến x , ta coi z là hàm số một biến số x , còn y là hằng số. Vì vậy quy tắc tính đạo hàm riêng hoàn toàn giống như quy tắc tính đạo hàm của hàm số một biến số.

Ví dụ 1.

a) Cho $z = 3x^2y^3 + x + y$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ tại điểm $(1; 2)$.

b) Cho $z = x^y, x > 0$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

c) Cho $z = xy + \arctg \frac{x}{y}$. Tính $\frac{\partial z}{\partial y}$.

d) Cho $z = x + (y - 1)\arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}(x; 1)$.

Đối với hàm số nhiều hơn hai biến số ta có định nghĩa đạo hàm riêng tương tự như trên.

Chú ý: Khi tính đạo hàm riêng của hàm $u = f(x, y, z)$ theo biến x , ta coi u là hàm số một biến số x , còn y, z là hằng số; theo biến y , ta coi x, z là hằng số; theo biến z , ta coi x, y là hằng số.

Ví dụ 2. Cho $u = xy^2 + yz^2 - x^3z^2$. Tính các đạo hàm riêng cấp một của hàm số u .

Ví dụ 3. (20192) Cho hàm số $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy - x^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

1) Khảo sát hàm số $f(x, y)$.

2) Tính $f'_y(x, y)$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $z = xy + \frac{x}{y}$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ và dz .

Ví dụ 5.

a) Cho hàm số $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ và $dz(0; 1)$.

b) Cho hàm số $z = \arctg \frac{y}{x}$. Tính biểu thức $A = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$.

Ví dụ 6. Cho hàm số $u = z^{\frac{x}{y}}$. Tính $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ và du .

Ví dụ 7. Cho hàm số $z = yf(x^2 - y^2)$ trong đó $f(u)$ là hàm khả vi theo u . Chứng minh

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz.$$

Ví dụ 8. Cho hàm số $u = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3(z+y)}{6} + \frac{x^2yz}{2} + f(y-z, z-x)$, $f(v, \omega)$ là hàm khả vi theo các đối số của nó. Tính $A = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} - xyz$.

Ví dụ 9. Cho hàm $f(x, y) = x \arctg \left(\frac{x}{y} \right)^2$. Tính $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$.

Chú ý: Tuy nhiên nếu hàm $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ không liên tục tại $(0; 1)$ thì ta không thể thay trực tiếp, mà phải dùng định nghĩa.

Ví dụ 10. Cho hàm $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Tính $\frac{\partial f}{\partial x}(0; 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0; 0)$.

Ví dụ 11. Cho hàm số $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2+y^2} & \text{khi } (x, y) \neq (0; 0) \\ 0 & \text{khi } (x, y) = (0; 0). \end{cases}$

- 1) Tính $f'_x(x, y)$.
- 2) Hỏi có tồn tại $f'_{xy}(0; 0)$ hữu hạn hay không?

Ví dụ 12. (2022N3) Cho hàm số $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{khi } x^2 + y^2 \neq (0; 0) \\ 0 & \text{khi } (x, y) = (0; 0). \end{cases}$

- 1) Tính $f'_x(x, y)$.
- 2) Tính $f'_{xy}(0; 0)$.

3.3.2. Vi phân toàn phần

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên miền D và $M_0(x_0, y_0) \in D$. Cho x_0, y_0 các số gia $\Delta x, \Delta y$ tương ứng sao cho $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$. Biểu thức

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \quad (1)$$

được gọi là *số gia toàn phần* của hàm số f tại điểm $M_0(x_0, y_0)$.

Định nghĩa 3.3.2. Hàm số $f(x, y)$ được gọi là *khả vi* tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ nếu số gia toàn phần $\Delta f(x_0, y_0)$ biểu diễn được dưới dạng

$$\Delta f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y \quad (2)$$

trong đó A, B là những số phụ thuộc vào x_0, y_0 , còn $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$ khi $M \rightarrow M_0$ (tức $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$). Khi đó biểu thức $A\Delta x + B\Delta y$ được gọi là *vi phân toàn phần* của hàm số $f(x, y)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0)$.

$$\text{Ký hiệu} \quad df(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y. \quad (3)$$

Hàm số $f(x, y)$ được gọi là *khả vi* trên miền D nếu nó khả vi tại mọi điểm của miền đó.

Chú ý 1: Nếu hàm số $f(x, y)$ khả vi tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ thì nó liên tục tại điểm đó.

Thật vậy, cho $f(x, y)$ khả vi tại $M_0(x_0, y_0)$, từ (1), (2) ta có $\Delta f(x_0, y_0) \rightarrow 0$ khi $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$, vậy $f(x, y)$ liên tục tại $M_0(x_0, y_0)$.

Chú ý 2: Đối với hàm số một biến số, nếu $f(x)$ có đạo hàm $f'(x_0)$ thì hàm số khả vi tại điểm đó. Tuy nhiên đối với hàm nhiều biến số $z = f(x, y)$, sự tồn tại đạo hàm riêng tại điểm (x_0, y_0) chưa đủ để kết luận hàm số khả vi tại điểm đó.

Ví dụ 13. Cho hàm số $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{khi } (x, y) \neq (0; 0) \\ 0 & \text{khi } (x, y) = (0; 0). \end{cases}$

Tính $\frac{\partial f(0;0)}{\partial x}, \frac{\partial f(0;0)}{\partial y}$. Hàm số có khả vi tại điểm $(0;0)$ hay không?

Định lý 3.3.3. Nếu hàm số $z = f(x, y)$ khả vi tại điểm $M(x, y)$ thì tại điểm đó tồn tại các đạo hàm riêng $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ và $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = A, \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = B$ đồng thời

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y. \quad (4)$$

Chứng minh: Do hàm $z = f(x, y)$ khả vi tại điểm $M(x, y)$ nên số gia toàn phần Δz có thể biểu diễn dưới dạng (2).

Cho y không đổi (nghĩa là $\Delta y = 0$), khi đó vế trái của (2) là $\Delta z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = \Delta_x z$ gọi là *số gia riêng* của hàm số z theo biến x , còn vế phải của (2) sẽ là $A\Delta x + \alpha\Delta x$. Vậy $\Delta_x z = A\Delta x + \alpha\Delta x$ hay $\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \alpha$ (*).

Khi $\Delta x \rightarrow 0$ thì $\alpha \rightarrow 0$, từ (*) ta có $A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$. Tương tự ta có $B = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$.

Như vậy theo (3) ta được $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$.

Định lý sau cho ta điều kiện đủ để hàm số $z = f(x, y)$ khả vi tại $M_0(x_0, y_0)$.

Định lý 3.3.2. Nếu hàm số $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng f'_x, f'_y ở lân cận điểm $M_0(x_0, y_0)$ và nếu các đạo hàm riêng đó liên tục tại M_0 thì $f(x, y)$ khả vi tại M_0 và ta có

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y. \quad (5)$$

Chứng minh: Ta có

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)], \end{aligned}$$

Sử dụng công thức số gia giới nội cho hàm số một biến số, ta được

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) &= \Delta x f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0), \\ f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) &= \Delta y f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y), \end{aligned}$$

trong đó $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$. Vì các đạo hàm riêng f'_x, f'_y liên tục tại M_0 nên

$$\begin{aligned} f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) &= f'_x(x_0, y_0) + \alpha, \\ f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) &= f'_y(x_0, y_0) + \beta, \end{aligned}$$

trong đó $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$ khi $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$. Từ đó ta có $\Delta f(x_0, y_0) = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y$.

Vậy $f(x, y)$ khả vi tại điểm M_0 và ta có (5).

Chú ý: Do x, y là các biến số độc lập nên ta có $\Delta x = dx, \Delta y = dy$ và

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (6)$$

Tương tự vì phân của hàm số ba biến số $u = f(x, y, z)$ được tính theo công thức

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Ví dụ 14. Cho $z = \arctg \frac{x+y}{x-y}$. Tìm $dz, dz(2; 1)$.

Ví dụ 15. Cho $u = xe^{y^2+z}$. Tìm du .

3.3.3. Ứng dụng vi phân tính gần đúng

Cho hàm số $f(x, y)$ khả vi tại điểm (x_0, y_0) . Từ định nghĩa vi phân ta thấy số gia toàn phần Δz và vi phân toàn phần dz chỉ khác nhau một đại lượng $\alpha \Delta x + \beta \Delta y$ trong đó $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$ khi $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ (tức là $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0$ hay $\alpha \Delta x + \beta \Delta y$ là VCB bậc cao hơn ρ). Nên khi $\Delta x, \Delta y$ có trị tuyệt đối đủ nhỏ, có thể coi $\Delta z \approx dz$ và ta có

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y,$$

Hay

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y. \quad (7)$$

Công thức (7) là công thức tính gần đúng bằng vi phân của hàm số $f(x, y)$ tại điểm (x_0, y_0) .

Ví dụ 16. Sử dụng vi phân tính gần đúng biểu thức $A = \sqrt[3]{1,02^2 + 0,05^2}$.

Giải: Xét hàm số $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$. Tính $A = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, trong đó $x_0 = 1, y_0 = 0, \Delta x = 0,02, \Delta y = 0,05$. Ta có

$$f'_x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}, f'_y = \frac{2y}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}} \Rightarrow f'_x(1; 0) = \frac{2}{3}, f'_y(1; 0) = 0,$$

theo công thức (7), ta được $A = \sqrt[3]{1,02^2 + 0,05^2} \approx \sqrt[3]{1^2 + 0^2} + \frac{2}{3} \cdot 0,02 + 0 \cdot 0,05 \approx 1,013$.

Ví dụ 17. Dùng biểu thức vi phân tính gần đúng

a) $A = \sqrt[3]{1,03^2 + 0,02^2}$.

b) $B = \arctg \frac{1,02}{0,95}$.

c) $(20201) B = \sqrt[3]{0,96^3 + 2,03^2 + 3}$.

3.3.4. Đạo hàm của hàm số hợp

Định nghĩa 3.3.3. Cho hàm số $z = f(u, v)$ xác định trên miền $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$, trong đó u, v là các hàm số hai biến số độc lập x, y : $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ cùng xác định trên miền D , có tập giá trị trong Δ , thì ta nói z là hàm số hợp của hàm số hai biến số x, y qua hai biến số trung gian u, v .

Ký hiệu $z = f[u(x, y), v(x, y)]$.

Ví dụ 18. Cho $z = e^u \ln v$, với $u = x + y, v = xy$, thì z là hàm số hợp và $z = e^{x+y} \ln(xy)$.

Định lý 3.3.3. Nếu hàm số $z = f(u, v)$ có các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ liên tục trong miền Δ và u, v có các đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ trên miền D , thì trong miền D tồn tại các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ và

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.\end{aligned}$$

Ví dụ 19. Cho $z = e^u \ln v$, với $u = x - y, v = xy$. Tìm $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Chú ý: Nếu $z = f(x, y), y = y(x)$ thì khi đó hàm số hợp của hai hàm số trên là hàm số một biến số $x, z = f(x, y(x))$. Khi đó ta có

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x).$$

Ví dụ 20. Cho $z = e^{x^2+y^2}$, trong đó $y = \cos x$. Tìm $\frac{dz}{dx}$.

3.3.5. Đạo hàm của hàm số ẩn

Hàm số ẩn một biến số. Giả sử cho hệ thức liên hệ giữa hai biến x và y dưới dạng

$$F(x, y) = 0. \quad (8)$$

Nếu với mỗi x thuộc khoảng nào đó, có một (hoặc nhiều) y sao cho $F(x, y) = 0$, ta nói phương trình (8) xác định một (hoặc nhiều) hàm số ẩn y theo x trong khoảng đó. Như vậy hàm số ẩn $y = y(x)$ được xác định bởi phương trình (8), nếu khi thế nó vào (8) ta được một đồng nhất thức.

Ví dụ 21. Phương trình $x^2 + y^2 = 1$ xác định hàm số ẩn $y = +\sqrt{1-x^2}$ hoặc $y = -\sqrt{1-x^2}$ cùng có MXĐ là $[-1; 1]$.

Vậy vấn đề đặt ra, với điều kiện nào thì (8) xác định hàm số ẩn? Ta có định lý sau

Định lý 3.3.4. Giả sử tại $M_0(x_0, y_0), F(x_0, y_0) = 0$. Nếu trong lân cận của điểm M_0 hàm $F(x, y)$ có các đạo hàm riêng $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ liên tục và $\frac{\partial F(M_0)}{\partial y} \neq 0$ thì phương trình (8) xác định một hàm số ẩn $y = \phi(x)$ trong một lân cận nào đó của x_0 thỏa mãn điều kiện $y_0 = \phi(x_0)$, đồng thời trong lân cận đó thì hàm số $y = \phi(x)$ liên tục, có đạo hàm liên tục và

$$\frac{dy(x_0)}{dx} = -\frac{\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}}. \quad (9)$$

Ví dụ 22. Tìm $y'(x)$ tại $x = 1$, nếu $x^2y + x^3 + y^3 - 3 = 0$.

Ví dụ 23. Cho hàm số $y = y(x)$ xác định từ phương trình $\sin(x + y) + y = 0$. Tính y' .

Chú ý: Để tính đạo hàm của hàm số ẩn $y = y(x)$ xác định từ phương trình $F(x, y) = 0$, ta có thể đạo hàm hai vế của $F(x, y(x)) = 0$ theo biến x

$$\frac{dF(x, y(x))}{dx} = 0 \Leftrightarrow F'_x + F'_y y'(x) = 0, \text{ từ đó ta tính được } y'(x).$$

Ví dụ 24. Cho phương trình $x^2 + y^2 + \ln(x^2 + y^2) = a^2$. Tính $y'(x)$.

Hàm số ẩn hai biến số. Cũng như hàm số ẩn một biến số, ta có khái niệm hàm số ẩn hai biến số, nghĩa là ứng với mỗi cặp (x, y) cho ta một giá trị xác định z thỏa mãn đẳng thức

$F(x, y, z) = 0$ thì hàm $z = \phi(x, y)$ là hàm ẩn hai biến số độc lập x và y được xác định từ phương trình

$$F(x, y, z) = 0, \quad (10)$$

đồng thời ta cũng có định lý

Định lý 3.3.5. Giả sử $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Nếu hàm $F(x, y, z)$ trong lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ có các đạo hàm riêng liên tục và $\frac{\partial F(M_0)}{\partial z} \neq 0$ thì phương trình (10) xác định một hàm số ẩn $z = \phi(x, y)$ trong một lân cận nào đó của (x_0, y_0) thỏa mãn điều kiện $z_0 = \phi(x_0, y_0)$, đồng thời trong lân cận đó thì hàm $z = \phi(x, y)$ liên tục, có các đạo hàm riêng liên tục và

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial z}}. \quad (11)$$

Chú ý: Trong công thức (11) xét tại một điểm cụ thể, ta có thể thay tại một điểm bất kỳ, với điểm đó các điều kiện của định lý được thỏa mãn. Nên ta có thể viết

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \quad (12)$$

Ví dụ 25. Cho $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Ví dụ 26. (2022N1) Tính $z'_x(0,1)$, trong đó hàm số $z = z(x, y)$ xác định bởi phương trình $e^z + xy + z^3 = 1$.

Ví dụ 27. (2024N1) Phương trình $x^3 - 8y^3 - (x - 2y)^2 = 0$ xác định hàm số ẩn $y = y(x)$. Viết phương trình tiếp tuyến của hàm số này tại điểm $M(1; -1)$.

Ví dụ 28. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ biết rằng $yz = \arctg(xz)$.

3.3.6. Đạo hàm cấp cao

Xét hàm số hai biến số độc lập $z = f(x, y)$. Các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ được xét ở mục 3.3.1 được gọi là các đạo hàm riêng cấp một của hàm $z = f(x, y)$. Nói chung chúng cũng là hàm số hai biến số x và y :

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = g(x, y);$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = h(x, y).$$

Nếu các hàm g, h tồn tại các đạo hàm riêng thì các đạo hàm riêng đó được gọi là các đạo hàm riêng cấp hai của hàm $z = f(x, y)$. Tùy theo thứ tự lấy đạo hàm theo biến số x hoặc y mà ta có 4 đạo hàm riêng cấp hai và ký hiệu:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = z''_{xx}, \text{ lấy đạo hàm hai lần theo biến } x.$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} = z''_{xy}, \text{ lấy đạo hàm lần thứ nhất theo biến } x, \text{ lần thứ hai theo biến } y.$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx} = z''_{yx}, \text{ lấy đạo hàm lần thứ nhất theo biến } y, \text{ lần thứ hai theo biến } x.$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = z''_{yy}, \text{ lấy đạo hàm hai lần theo biến } y.$$

Các đạo hàm riêng f''_{xy}, f''_{yx} gọi là các đạo hàm riêng cấp hai hỗn hợp.

Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp hai gọi là các đạo hàm riêng cấp ba. Hoàn toàn tương tự ta có các đạo hàm riêng cấp 4, 5, ...

Ví dụ 29. Cho $f(x, y) = x^2 y^3 + y^2$. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của $f(x, y)$.

Ví dụ 30. (20233) Cho $x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{khi } (x, y) \neq (0; 0) \\ 0 & \text{khi } (x, y) = (0; 0). \end{cases}$

Chúng tỏ rằng $f''_{yx}(0; 0) \neq f''_{xy}(0; 0)$.

Trong ví dụ trên ta thấy rằng $f''_{yx} \neq f''_{xy}$, tuy nhiên định lý sau sẽ chứng tỏ điều kiện để hai đạo hàm đó bằng nhau.

Định lý 3.3.6. (Định lý Schwarz) Nếu trong lân cận nào đó của điểm (x, y) hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng hỗn hợp $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ liên tục thì $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$.

Định lý còn áp dụng cho đạo hàm riêng cấp cao của hàm nhiều biến số $n > 2$.

Chú ý: Trường hợp đạo hàm riêng cấp cao ($n \geq 3$), chẳng hạn $n = 4$ ta cũng có

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y \partial x} = \frac{\partial^4 f}{\partial y \partial x^3} = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial x^2} = \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y},$$

với điều kiện số lần lấy đạo hàm theo x là 3, theo y là 1 (không kể thứ tự).

Ví dụ 31. Cho $u = x^2 e^{y^2 - z^2}$. Ta có

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial x \partial y} = -8xyze^{y^2 - z^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 4ye^{y^2 - z^2}.$$

Ví dụ 32. Cho hàm $z = xe^{\frac{y}{x}} + \sin \frac{x}{y}$. Tính $A = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Ví dụ 33. Cho hàm $u = f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ trong đó $f(r)$ là hàm khả vi đến cấp hai. Tính

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Ví dụ 34. Cho hàm $u = \ln(1 + z)$ trong đó $z = xy\sqrt{x^2 - y^2}$. Tính

$$A = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) (y^2 - x^2)(1 + z)^2 - x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Ví dụ 35. Cho hàm số $y = y(x)$ xác định từ PT $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-x}) = 0$. Tính $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}$.

3.3.7. Vi phân cấp cao

Xét hàm số $z = f(x, y)$. Ta có $df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$ nếu tồn tại gọi là *vi phân toàn phần cấp một* của hàm số $z = f(x, y)$. Nói chung $df(x, y)$ cũng là hàm số của hai biến số x và y . Vi phân toàn phần của $df(x, y)$ nếu tồn tại, được gọi là *vi phân cấp hai* của hàm số f tại điểm (x, y) và ký hiệu là $d^2 f(x, y)$.

$$\text{Vậy } d^2 f(x, y) = d\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy\right).$$

Tiếp tục quá trình trên ta định nghĩa các vi phân cấp cao hơn

$$d^3 f(x, y) = d(d^2 f(x, y)), \dots, d^n f(x, y) = d(d^{n-1} f(x, y)).$$

Ta tìm công thức tính $d^2 f(x, y)$. Với x, y là các biến số độc lập nên $dx = \Delta x, dy = \Delta y$ là các hằng số không phụ thuộc vào x và y , do đó

$$\begin{aligned} d^2 f(x, y) &= d\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy \right) dy = \\ &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} (dx)^2 + \left(\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} \right) dx dy + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} (dy)^2 \end{aligned}$$

Giả thiết các đạo hàm riêng hỗn hợp liên tục ta có $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$, và ký hiệu

$$(dx)^2 = dx^2, (dy)^2 = dy^2 \text{ thì } d^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} dy^2. \quad (13)$$

Ví dụ 36. Cho $u = y \ln x$. Tìm $d^2 z$.

Chú ý: Trong trường hợp x, y không phải là các biến số độc lập (hàm hợp):

$$z = f(x, y) \text{ trong đó } x = x(s, t), y = y(s, t),$$

thì công thức (13) không còn đúng nữa vì khi này dx và dy cũng là hàm số của s và t , khi đó công thức (13) có dạng $d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial f}{\partial x} d^2x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2y$. (14)

Trong công thức (14), khi x, y là các biến số độc lập thì dx, dy là hằng số nên $d^2x = 0, d^2y = 0$ công thức (14) trở thành (13).

Ví dụ 37. (20233) Cho hàm số sau $f(x, y) = xe^y$. Tính $d^2f(1, 0)$.

Ví dụ 38. Cho $z = x^{y^2}$. Tính dz .

Ví dụ 39. Cho $u = x^{y^2z}$. Tìm du .

Ví dụ 40. Tìm vi phân của $z = (x + y) \ln(x^2 + y^2 + 4) + x\sqrt{x^2 + y^2 + 4}$ tại $M(0; 1)$ ứng với $\Delta x = \Delta y = 0,01$.

Ví dụ 41. Cho hàm $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$. Tính d^2z .

3.3.8. Công thức Taylor

Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp $n + 1$ liên tục trong một lân cận nào đó chứa điểm $M_0(x_0, y_0)$. Nếu điểm $M_0(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ cũng thuộc lân cận trên thì ta có công thức Taylor đối với hàm số hai biến số $z = f(x, y)$ là

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y), 0 < \theta < 1. \quad (18)$$

trong đó $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$.

Ví dụ 42. Khai triển hàm $f(x, y) = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y - 4$ theo công thức Taylor trong lân cận điểm $(2; -1)$.

Giải: Với $x_0 = 2, y_0 = -1$, ta có $f(x_0, y_0) = f(2; -1) = 2$,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 3x^2 - 10x - y + 10 \Rightarrow \frac{\partial f(2; -1)}{\partial x} = 3, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -x + 2y + 5 \Rightarrow \frac{\partial f(2; -1)}{\partial y} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 6x - 10 \Rightarrow \frac{\partial^2 f(2; -1)}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f(2; -1)}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = -1 \Rightarrow \frac{\partial^2 f(2; -1)}{\partial x \partial y} = -1,$$

$$\frac{\partial^3 f(2; -1)}{\partial x^3} = 6, \quad \frac{\partial^3 f(2; -1)}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 f(2; -1)}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 f(2; -1)}{\partial y^3} = 0,$$

$$\Delta x = dx = x - 2, \Delta y = dy = y + 1.$$

Các đạo hàm riêng của hàm $f(x, y)$ cấp lớn hơn và bằng 4 đều bằng không, do đó ta có khai triển Taylor của hàm $f(x, y)$ tại điểm $(2; -1)$ là

$$f(x, y) = 2 + 3(x - 2) + (y + 1) + (x - 2)^2 - (x - 2)(y + 1) + (y + 1)^2 + (x - 2)^3.$$

Ví dụ 43. (2023N1) Tìm hệ số $x^5 y^2$ trong khai triển Maclaurin của hàm số $z = e^{xy} \ln(1 + x)$.

Ví dụ 44. Khai triển hàm $f(x, y) = y^x$ theo công thức Taylor đến bậc hai trong lân cận điểm $(1; 1)$.

Ví dụ 45. Khai triển hàm $f(x, y) = e^x \sin y$ theo công thức Taylor đến bậc ba trong lân cận điểm $(0; 0)$.

3.4. Cực trị

3.4.1. Cực trị của hàm số nhiều biến số

Định nghĩa 3.4.1. Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ có miền xác định là $D \subset \mathbb{R}^2$. Hàm số gọi là đạt cực đại tại điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$, nếu với mọi điểm $M(x, y)$ trong một lân cận nào đó của điểm M_0 (nhưng khác M_0) ta có $f(x, y) < f(x_0, y_0)$.

Hàm số $z = f(x, y)$ gọi là đạt cực tiểu tại điểm $M_0(x_0, y_0)$, nếu với mọi điểm $M(x, y)$ trong một lân cận nào đó của điểm M_0 (nhưng khác M_0) ta có $f(x, y) > f(x_0, y_0)$.

Giá trị cực đại, cực tiểu gọi chung là cực trị của hàm số. Điểm M_0 tại đó hàm số đạt cực trị gọi là điểm cực trị của hàm số và là cực trị địa phương.

Chú ý. Tại điểm cực trị $M_0(x_0, y_0)$ giá trị $\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ không đổi dấu trong một lân cận nào đó của M_0 . Nếu Δf có giá trị đổi dấu thì M_0 không là điểm cực trị.

Định lý 3.4.1. Nếu hàm số $z = f(x, y)$ đạt cực trị tại điểm M_0 và tại điểm đó tồn tại các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ hữu hạn thì các đạo hàm riêng đó bằng không: $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0$.

Chứng minh: Vì hàm f đạt cực trị tại điểm M_0 , cho nên nếu cố định $y = y_0$ thì hàm số $f(x, y_0)$ đạt cực trị tại $x = x_0$. Vì đạo hàm riêng $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}$ tồn tại, do đó nó phải bằng không theo định lý Fermat. Tương tự $\frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0$.

Điểm $M_0(x_0, y_0)$ có tọa độ thỏa mãn các đạo hàm riêng bằng không hoặc không tồn tại đạo hàm riêng được gọi là **điểm tới hạn** (đó là những điểm nghi ngờ có cực trị). Điểm mà tại đó có các đạo hàm riêng bằng không được gọi là **điểm dừng**.

Định lý 3.4.2. Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong một lân cận nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$ và M_0 là điểm dừng của hàm số.

$$\text{Ký hiệu } A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}.$$

Khi đó tại M_0

- 1) Nếu $B^2 - AC < 0$, thì hàm số đạt cực trị tại M_0 . Đó là cực đại nếu $A < 0$, là cực tiểu nếu $A > 0$.
- 2) Nếu $B^2 - AC > 0$, thì hàm số không đạt cực trị tại M_0 .
- 3) Nếu $B^2 - AC = 0$, thì chưa kết luận được hàm số có (hay không) đạt cực trị tại M_0 .

Vậy để tìm cực trị của hàm số $z = f(x, y)$ ta tiến hành theo các bước:

1) Tìm MXĐ và điểm dừng thuộc MXĐ của hàm $z = f(x, y)$, đó là những điểm

$$M_k(x_k, y_k), (k = 1, 2, 3, \dots) \text{ có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình } \begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

2) Tính các đạo hàm riêng cấp hai $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$ và tại mỗi điểm M_k tính

$$A = \frac{\partial^2 f(x_k, y_k)}{\partial x^2}, B = \frac{\partial^2 f(x_k, y_k)}{\partial x \partial y}, C = \frac{\partial^2 f(x_k, y_k)}{\partial y^2}.$$

+Nếu $B^2 - AC < 0$, hàm số đạt cực trị tại M_k . Đó là điểm cực đại nếu $A < 0$, là điểm cực tiểu nếu $A > 0$.

+Nếu $B^2 - AC > 0$, hàm số không có cực trị tại M_k .

+Nếu $B^2 - AC = 0$, chưa kết luận (phải tìm bằng cách khác).

3) Kết luận điểm cực trị, tính giá trị cực đại, cực tiểu của hàm số (nếu có).

Ví dụ 1. Tìm cực trị của hàm số $z = x^3 + y^3 - 9xy$.

Giải: MXĐ $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$.

+Điểm dừng của hàm số có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 3x^2 - 9y = 0, \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3y^2 - 9x = 0. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được hai điểm dừng $M_1(0; 0)$ và $M_2(3; 3)$.

+Tính các đạo hàm riêng cấp hai

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 6x, \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = -9, \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 6y.$$

Tại điểm $M_1(0; 0)$ ta có

$$A = \frac{\partial^2 f(0;0)}{\partial x^2} = 0, B = \frac{\partial^2 f(0;0)}{\partial x \partial y} = -9, C = \frac{\partial^2 f(0;0)}{\partial y^2} = 0,$$

do đó $B^2 - AC = (-9)^2 - 0 = 81 > 0 \Rightarrow$ điểm $M_1(0; 0)$ không là điểm cực trị.

Tại điểm $M_2(3; 3)$ ta có

$$A = \frac{\partial^2 f(3;3)}{\partial x^2} = 6.3 = 18, B = \frac{\partial^2 f(3;3)}{\partial x \partial y} = -9, C = \frac{\partial^2 f(3;3)}{\partial y^2} = 6.3 = 18,$$

ta có $B^2 - AC = (-9)^2 - 18.18 = -243 < 0$, hàm số đạt cực trị tại M_2 và do $A = 18 > 0 \Rightarrow$ điểm $M_2(3; 3)$ là điểm cực tiểu.

+Vậy hàm số đạt cực tiểu tại điểm $M_2(3; 3)$ và giá trị cực tiểu là $z_{\min} =$.

Ví dụ 2. Tìm cực trị của hàm số $z = 6xy + (47 - x - y)(4x + 3y)$.

Ví dụ 3. Tìm cực trị của hàm số $z = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2xy$.

Ví dụ 4. (2024N6) Tìm tất cả các điểm cực trị của hàm số $f(x, y) = \frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{xy}{6}$.

Ví dụ 5. (2023N3) Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = y^2 - 2xy - x^2$.

HD: +Tìm điểm dừng của hàm số bằng cách giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0. \end{cases}; M(0; 0)$

+Tính các đạo hàm riêng cấp hai $A = \frac{\partial^2 f(0;0)}{\partial x^2} = -2, B = \frac{\partial^2 f(0;0)}{\partial x \partial y} = -2, C = \frac{\partial^2 f(0;0)}{\partial y^2} = 2,$

và $B^2 - AC = 0$ do đó chưa kết luận được. Ta tiến hành như sau: xét dấu

$$\Delta f = f(x, y) - f(0; 0) = y^2 - 2xy - x^2.$$

Với x, y đủ gần 0 ta chọn $x = 0, y = \frac{1}{n}$, khi đó $\Delta f = f\left(0, \frac{1}{n}\right) > 0$. Mặt khác ta chọn $x = \frac{1}{n}, y = 0$, khi đó $\Delta f = f\left(\frac{1}{n}, 0\right) < 0$.

Như vậy tại lân cận điểm $M_1(0; 0)$ giá trị Δf đổi dấu, tức là hàm số không có cực trị tại M_1 .

Ví dụ 6. Tìm cực trị của hàm số $z = e^{x^2+y^2}(2x^2 + y^2)$.

Ví dụ 7. Tìm cực trị của hàm số $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

Ví dụ 8. Tìm a, b, c để hàm số $z = x^3 - 2y^3 + ax + by + c$ đạt cực trị tại điểm $M(-1; 1)$ và $z(M) = 6$.

Ví dụ 8. Tìm cực trị của hàm số $z = 4 - \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}$.

Giải: MXĐ: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Ta tìm điểm dừng của hàm số từ hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{-4x}{3\sqrt[3]{x^2+y^2}} = 0, \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{-4y}{3\sqrt[3]{x^2+y^2}} = 0. \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm. Tuy nhiên $x = 0, y = 0$ không phải là nghiệm của hệ trên, nhưng theo định nghĩa đạo hàm riêng ta có $\frac{\partial f(0;0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial f(0;0)}{\partial y} = 0$. Do đó điểm $O(0; 0)$ vẫn là điểm dừng của hàm số. Vì các đạo hàm riêng cấp hai không liên tục tại $O(0; 0)$ do đó ta không thể tìm A, B, C tại $O(0; 0)$. Ta xét

$$\Delta z = z(x, y) - z(0; 0) = 4 - \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2} - 4 = -\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2} < 0, \forall (x, y) \neq (0; 0).$$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $O(0; 0)$ và giá trị cực đại là $z_{\max}$.

3.4.2. Cực trị có điều kiện

Trong mục 1.4.1 ta đã xét cực trị của hàm số $z = f(x, y)$ với x và y biến thiên độc lập trong MXĐ của nó và gọi là cực trị không có điều kiện.

Trong mục này ta xét bài toán tìm cực trị của hàm số $z = f(x, y), (x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2$. (19)

trong đó các biến số độc lập x và y có liên hệ với nhau bởi điều kiện $\varphi(x, y) = 0$. (20)

Cực trị tìm được gọi là cực trị có điều kiện.

Để giải bài toán này, Lagrange tiến hành như sau:

1) Lập hàm số $\Phi = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$, (21)

trong đó λ là tham số chưa được xác định.

$$2) \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

ta được các điểm dừng; chẳng hạn $M_1(x_1, y_1)$ ứng với λ_1 , $M_2(x_2, y_2)$ ứng với $\lambda_2, \dots$

3) Kiểm tra điều kiện đủ đối với từng điểm dừng:

a/ Đối với điểm $M_1(x_1, y_1)$, ta xét $\Delta f|_{M_1} = f(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) - f(x_1, y_1)$, trong đó $\Delta x, \Delta y$ liên hệ bởi đẳng thức $\varphi(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) = 0$.

Nếu $\Delta f|_{M_1} > 0$ hàm số đạt cực tiểu tại M_1 ; nếu $\Delta f|_{M_1} < 0$ hàm số đạt cực đại tại M_1 .

b/ Đối với các điểm $M_2, M_3, \dots$ (nếu có) cũng được tìm tương tự.

Phương pháp tìm cực trị của bài toán (19) với điều kiện (20) như trên gọi là *phương pháp nhân tử Lagrange*.

Ví dụ 9. Tìm cực trị của hàm số $z = 3x + 4y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

Giải: Theo phương pháp nhân tử Lagrange, lập hàm

$$\Phi = 3x + 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 1), \quad \varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 3 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 4 + 2\lambda y = 0 \\ \varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được điểm dừng $M_1\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ ứng với $\lambda_1 = \frac{5}{2}$, điểm dừng $M_2\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ ứng với $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$.

$$\Delta f|_{M_1} = [3(-\frac{3}{5} + \Delta x) + 4(-\frac{4}{5} + \Delta y)] - [3(-\frac{3}{5}) + 4(-\frac{4}{5})] = 3\Delta x + 4\Delta y. (*)$$

$$\text{Mà } \varphi|_{\overline{M_1}} = (-\frac{3}{5} + \Delta x)^2 + (-\frac{4}{5} + \Delta y)^2 - 1 = 0, \text{ với } \overline{M_1}(-\frac{3}{5} + \Delta x; -\frac{4}{5} + \Delta y),$$

hay

$$\begin{aligned} \Delta x^2 + \Delta y^2 + \frac{9}{25} + \frac{16}{25} - \frac{6}{5}\Delta x + \frac{8}{5}\Delta y - 1 &= 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}(3\Delta x + 4\Delta y) = \Delta x^2 + \Delta y^2 \\ &\Leftrightarrow 3\Delta x + 4\Delta y = \frac{5}{2}(\Delta x^2 + \Delta y^2). (**) \end{aligned}$$

Thay (**) vào (*) ta được $\Delta f|_{M_1} = \frac{5}{2}(\Delta x^2 + \Delta y^2) > 0$.

Hàm số đạt cực tiểu tại M_1 và $z_{\min} =$.

Hoàn toàn tương tự ta có $\Delta f|_{M_2} < 0$. Hàm số đạt cực đại tại M_2 và $z_{\max} =$.

Vậy z có một điểm cực tiểu $M_1\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ và một điểm cực đại $M_2\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$

Chú ý. Nếu từ điều kiện (20) ta xác định được $y = y(x)$ đơn trị, thế $y = y(x)$ vào (19) ta được hàm số một biến số $x: z = f(x, y(x))$.

Khi đó trở về xét bài toán tìm cực trị hàm số một biến số.

Ví dụ 10. Tìm cực trị của hàm số $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (*) với điều kiện $x + y - 1 = 0$

Ví dụ 11. Tìm cực trị của hàm số $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

3.4.3. Giá trị lớn nhất, bé nhất của hàm số trong miền đóng và bị chặn

Hàm số $f(x, y)$ liên tục trên miền đóng và bị chặn D thì đạt được giá trị lớn nhất (LN), bé nhất (BN) trên miền đó. Nếu hàm số đạt được giá trị lớn nhất, bé nhất tại một điểm trong của miền D thì điểm đó là điểm cực trị của hàm số, do đó là điểm tới hạn (tức là những điểm tại đó $f'_x = 0, f'_y = 0$ hoặc không tồn tại ít nhất một đạo hàm riêng). Tuy nhiên hàm số $f(x, y)$ có thể đạt giá trị lớn nhất, bé nhất trên biên ∂D .

Vậy để tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của hàm số $f(x, y)$ trên miền đóng và bị chặn D , ta cần phải:

- 1) Tìm các điểm nghi ngờ trong miền D (điểm dừng, điểm không tồn tại ít nhất một trong các đạo hàm f'_x hoặc f'_y).
- 2) Tìm các điểm nghi ngờ trên biên ∂D .
- 3) Tính giá trị của hàm số tại tất cả những điểm nghi ngờ trong D và trên biên ∂D , từ đó suy ra giá trị lớn nhất (LN) và bé nhất (BN) của hàm số $f(x, y)$ trên miền D .

Ví dụ 12. Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của hàm số $z = x^2 + y^2$ trên miền tròn $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leq 9$.

Giải: ở đây miền D được giới hạn bởi đường tròn $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9$, kể cả những điểm trên đường tròn.

Tìm điểm dừng của hàm $z = x^2 + y^2$ trong miền tròn D . Ta có $z'_x = 2x, z'_y = 2y$ do đó hàm số có điểm dừng $M_0(0; 0)$ (điểm trong của miền D).

Ta tìm các điểm nghi ngờ trên biên, nghĩa là xét cực trị của hàm số $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9$.

Bằng cách lập hàm $\Phi = x^2 + y^2 + \lambda[(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 - 9]$ dẫn đến giải hệ phương trình

$$: \begin{cases} x + \lambda(x - \sqrt{2}) = 0 \\ y + \lambda(y - \sqrt{2}) = 0 \\ (x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9 \end{cases}$$

ta được hai điểm dừng $M_1\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ ứng với $\lambda_1 = -\frac{5}{3}$, $M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ứng với $\lambda_2 = -\frac{5}{3}$.

Tính $z(M_0) = 0$, $z(M_1) = 25$ và $z(M_2) = 1$.

Vậy hàm số đạt được giá trị lớn nhất $z_{LN} = z(M_1) = 25$ và đạt giá trị bé nhất $z_{BN} = z(0; 0) = 0$

Ví dụ 13. Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của hàm số $z = x^2 - y^2$ trong miền đóng $x^2 + y^2 \leq 4$.

Ví dụ 14. (2023N1) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số sau $z = x^2 + 2xy - y^2$ trong miền $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Ví dụ 15. Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của hàm số $z = x^2y + xy^2 - 3xy$ trong miền đóng $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$.